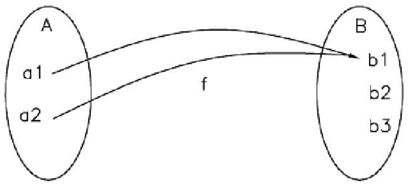
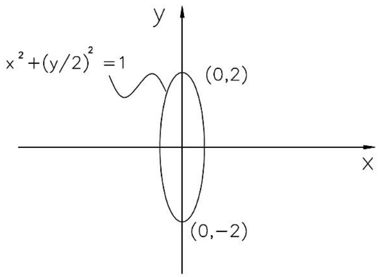
Universidade Federal de Alagoas
Faculdade de Arquitetura e Urbanismo
Curso de Arquitetura e Urbanismo

Disciplina: Fundamentos para a Análise Estrutural
Código: AURB006 **Turma:** A **Período Letivo:** 2007-2

Professor: Eduardo Nobre Lages



Funções



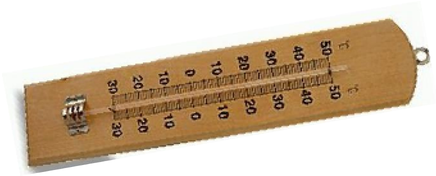
Maceió/AL

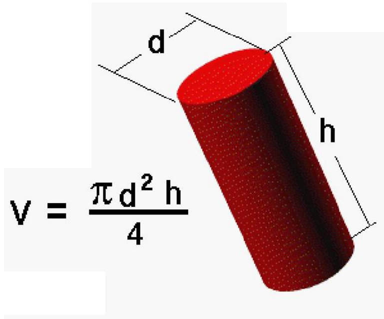
Objetivo

Formalizar relações de dependência entre grandezas.

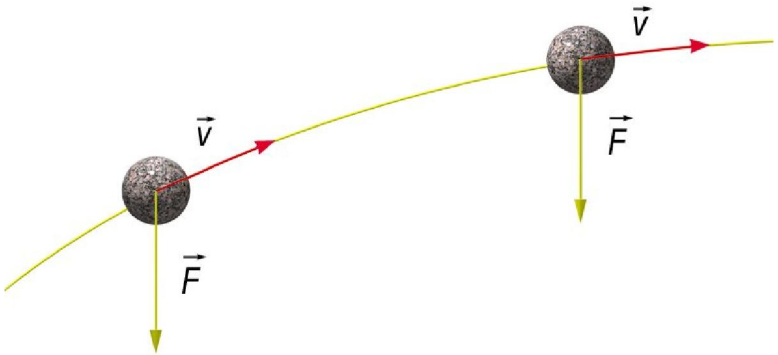
Grandezas

- **Escalares:** tempo, temperatura, comprimento, volume, fluxo luminoso etc.





- **Vetoriais:** força, velocidade, posição, aceleração, torque etc.



Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

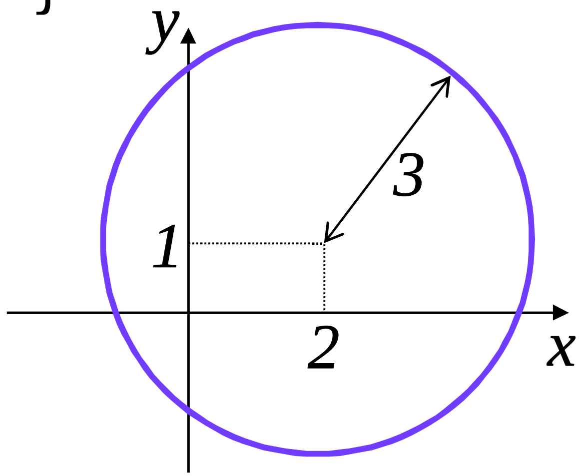
Relação

É uma regra que estabelece um vínculo entre elementos de dois conjuntos distintos, em particular, entre elementos de conjuntos numéricos.

Exemplo (Circunferência)

$$R = \left\{ (x, y) : x, y \in \Re, (x-2)^2 + (y-1)^2 = 9 \right\}$$

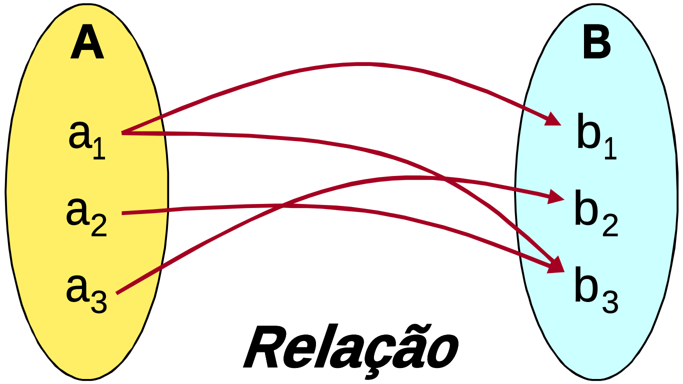
Representação gráfica

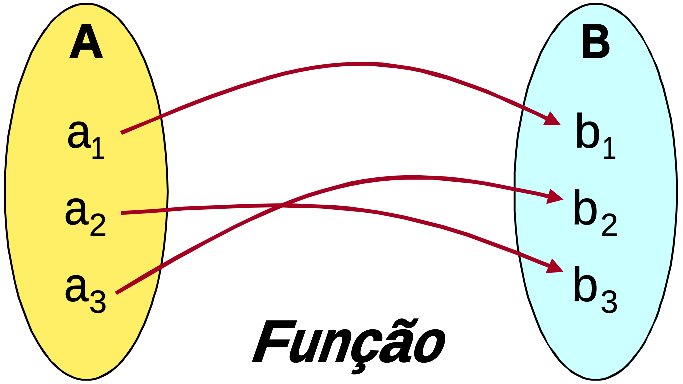


Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

Função

É uma relação que permite associar a cada elemento de um dos conjuntos um único elemento do segundo conjunto.



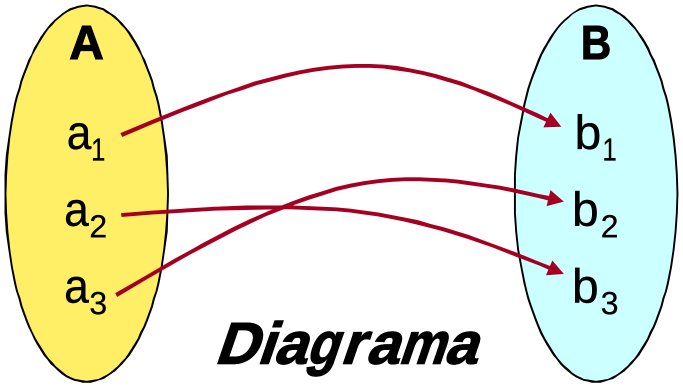


Toda função é uma relação, mas nem toda relação é uma função.

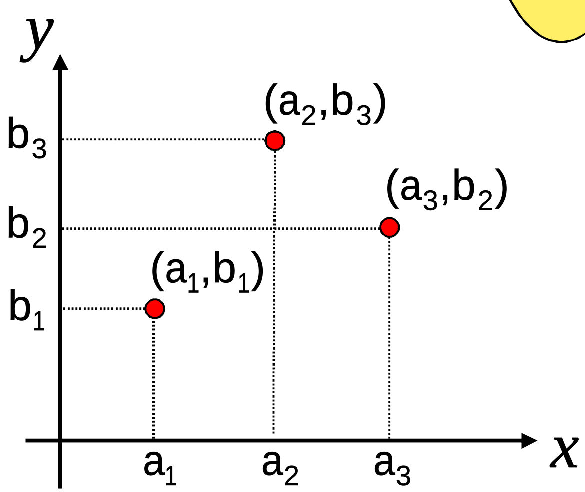
Formas de Representação

$f = \{(a_1,b_1), (a_2,b_3), (a_3,b_2)\}$

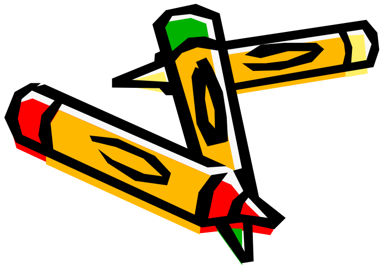
Pares Ordenados



Diagrama



Gráfico



Domínio, Contradomínio e Imagem

Variável dependente

Notação: $y = f(x)$

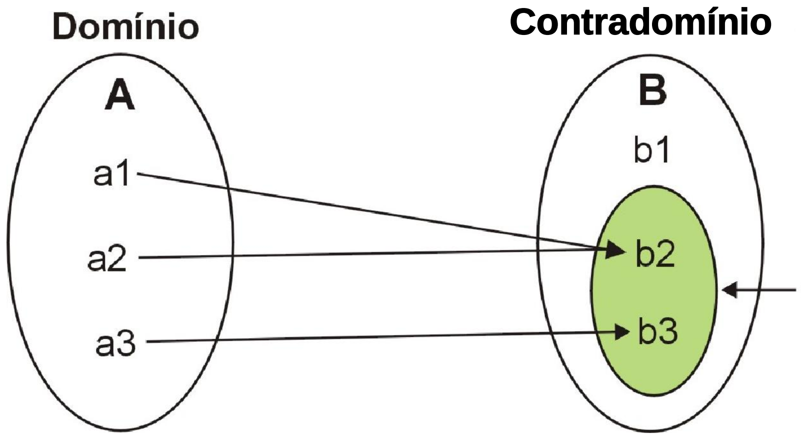
Variável independente

Em $f : A \rightarrow B$ — **A = *domínio* de *f***

$x \longmapsto y=f(x)$ — **B = *contradomínio* de *f***

O elemento $y \in B$ que resulta da relação $f(x) = y$ é denominado *imagem* de $x \in A$.

O conjunto de todos os elementos de B que são imagens dos elementos de A é chamado de *conjunto imagem*.



Conjunto Imagem

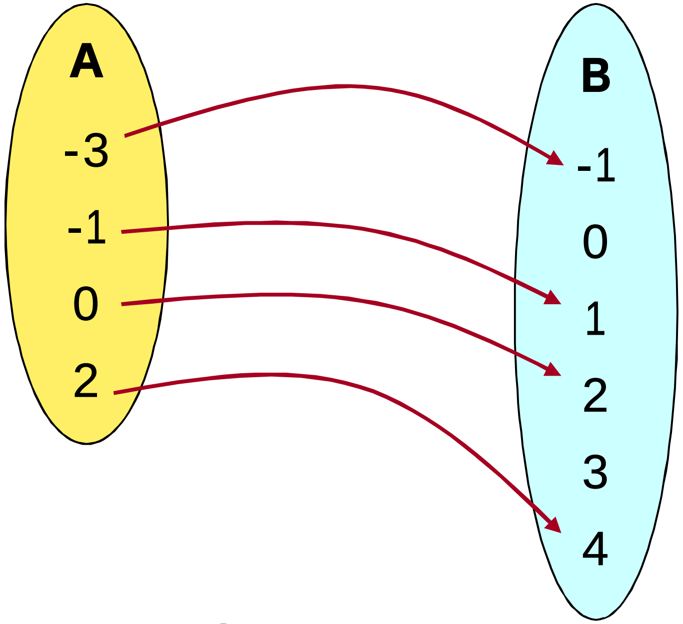
$$\mathcal{I}(f) = \{f(a) : a \in A\}$$

Exemplo

Considere os conjuntos A = {-3,-1,0,2} e
B = {-1,0,1,2,3,4}

Seja $f : A \to B$

$$x \longmapsto y=f(x)=x+2$$



É uma função

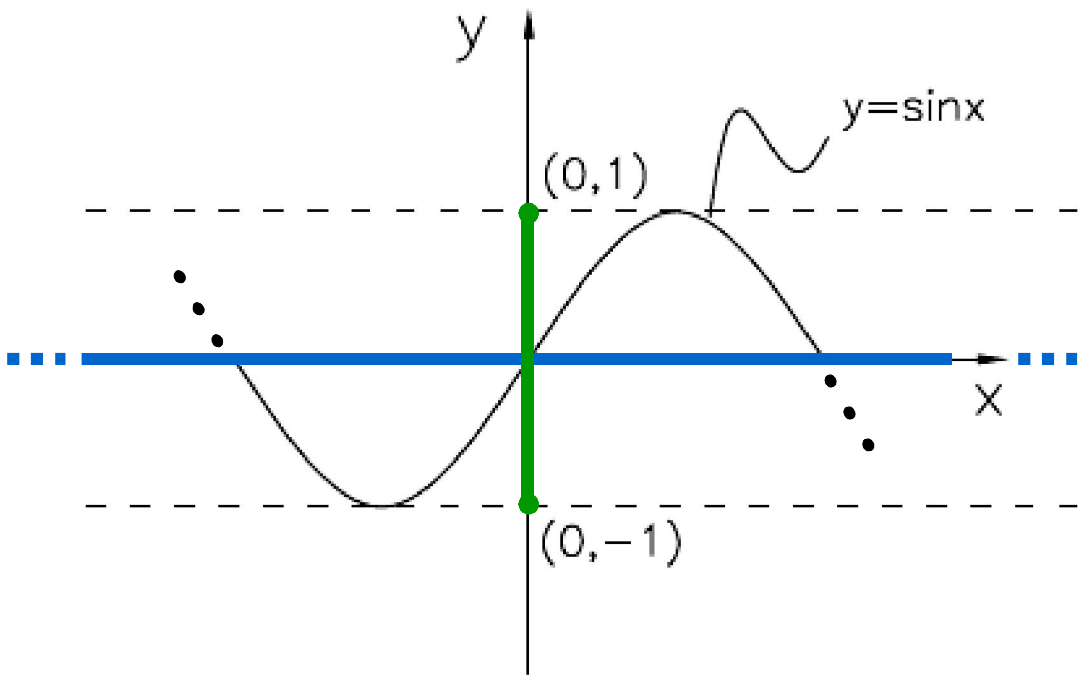
Domínio = {?3,-1,0,2}

Contradomínio = {?1,0,1,2,3,4}

Imagem = {?1,1,2,4}

Exemplo

Relação: $R = \{(x,y) : x, y \in \Re, y = \sin x\}$



É uma função

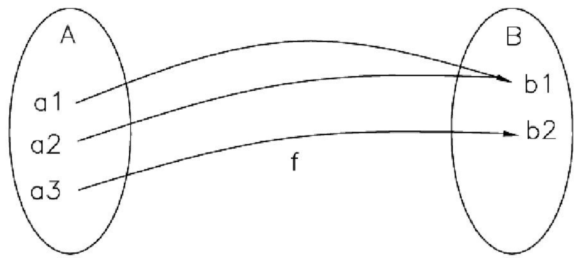
Domínio: ? $(-\infty < x < \infty)$

Imagem: ? $\{y : y \in \Re, -1 \leq y \leq 1\}$

Propriedades Especiais

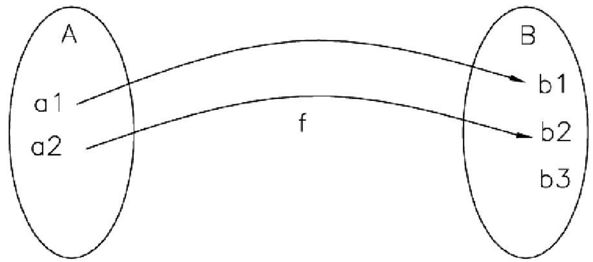
Funções Sobrejetoras:

Todo $b \in B$ é imagem de algum elemento de A.



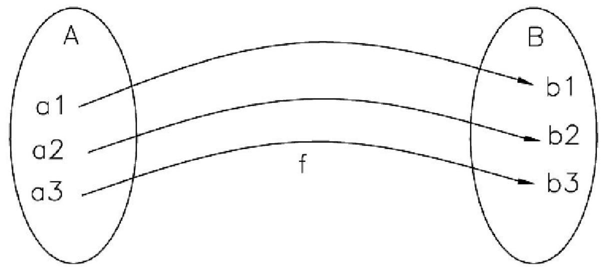
Funções Injetoras:

Para todo $b \in \mathcal{I}(f)$ existe um único $a \in A$ tal que $b = f(a)$



Funções Bijetoras:

É ao mesmo tempo injetora e sobrejetora.



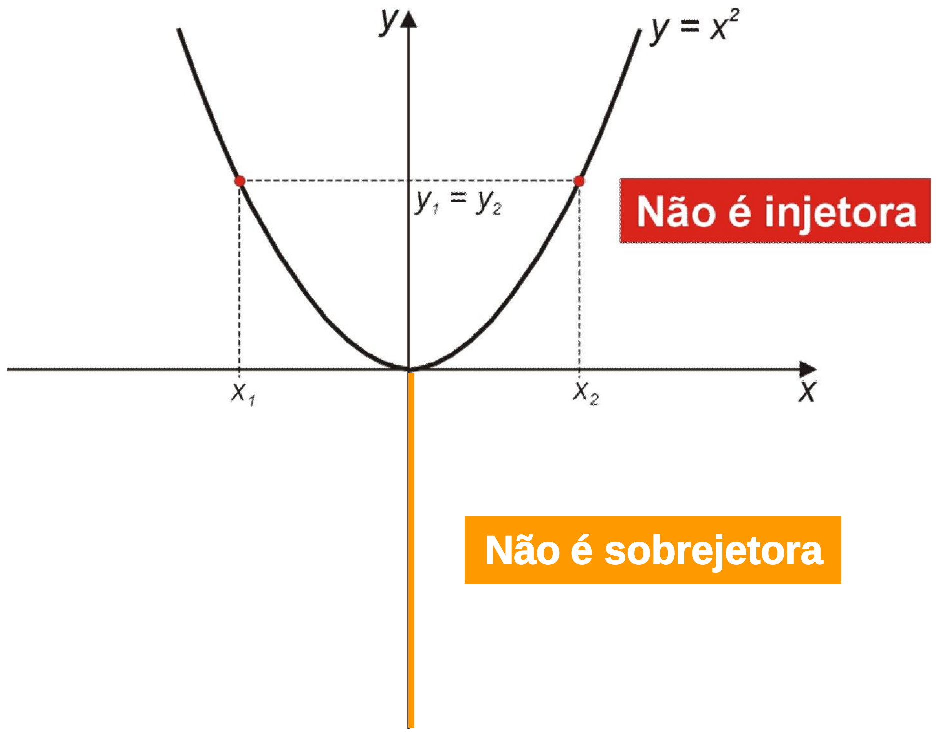
Exemplo

Seja: $\Re$ = conjunto dos números reais

$\Re^{+}$ = conjunto dos números reais não negativos

Regra: $f(x) = x^2$

1º CASO: $f_1 : \Re \rightarrow \Re.$



Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

Exemplo

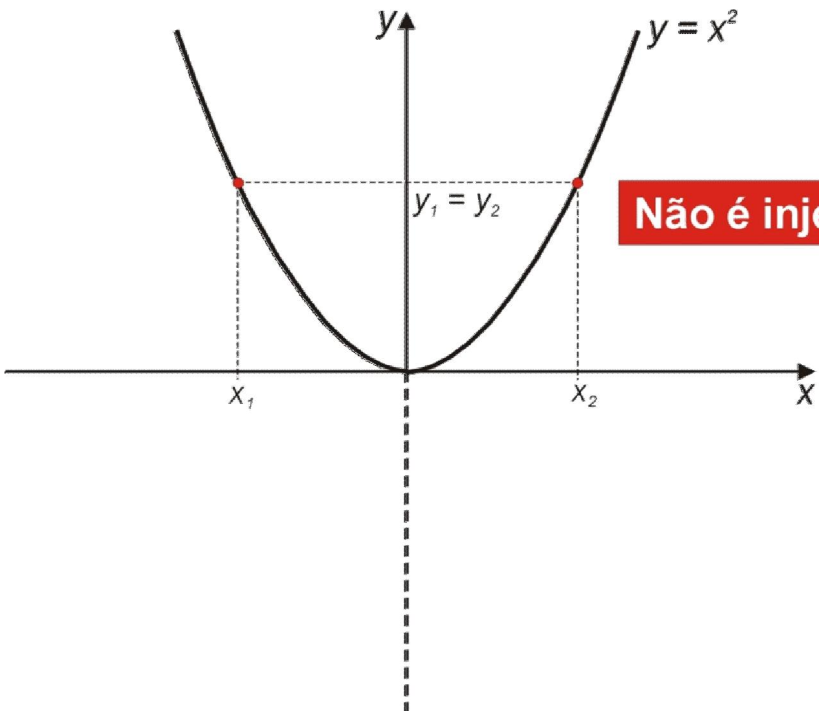
Seja: $\Re$ = conjunto dos números reais

$\Re^+$ = conjunto dos números reais não negativos

Regra: $f(x) = x^2$

2º CASO: $f_2 : \Re \rightarrow \Re^+$

É sobrejetora



Não é injetora

Exemplo

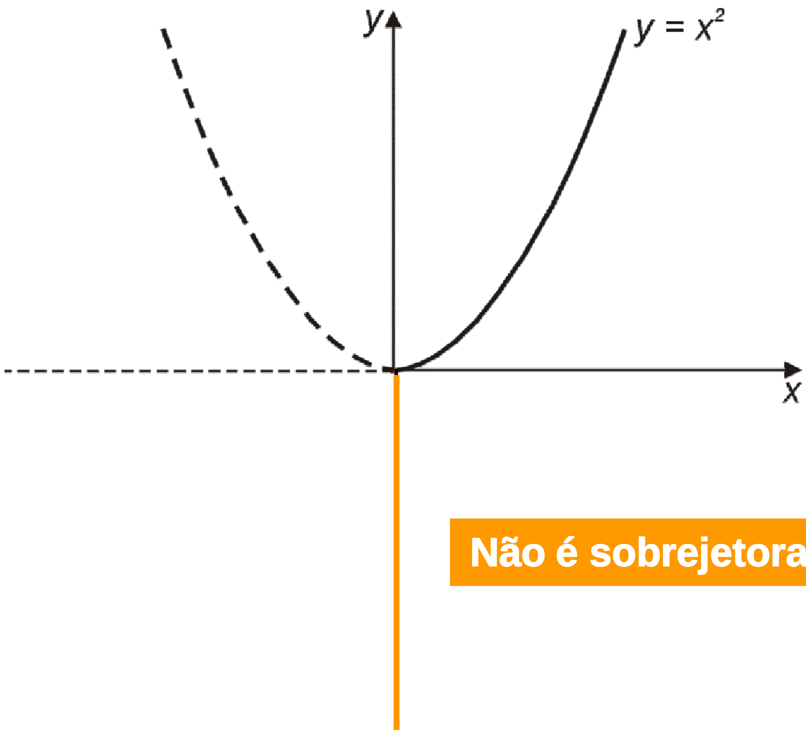
Seja: $\Re$ = conjunto dos números reais

$\Re^+$ = conjunto dos números reais não negativos

Regra: $f(x) = x^2$

3º CASO: $f_3 : \Re^+ \rightarrow \Re$

É injetora



Não é sobrejetora

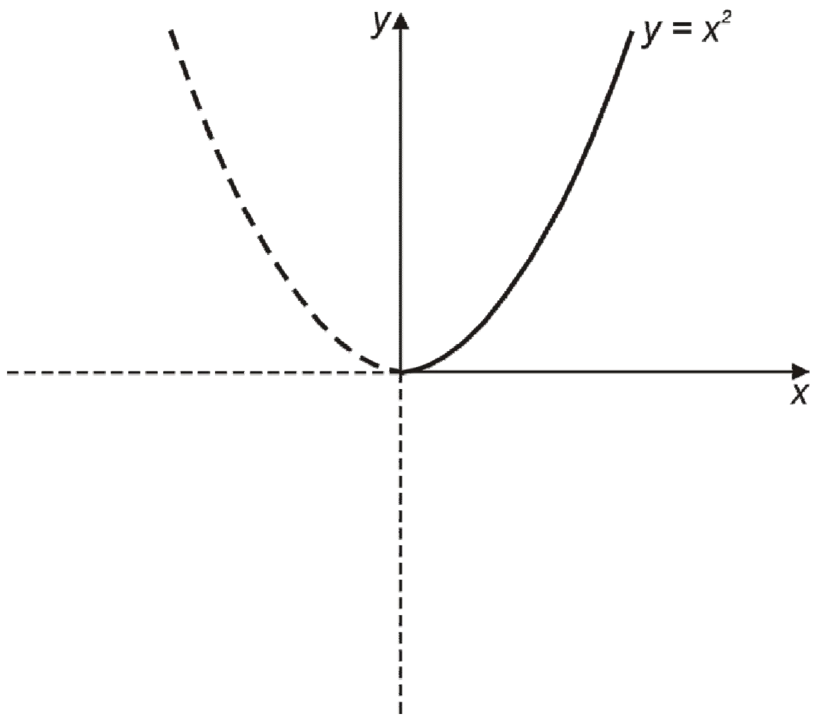
Exemplo

Seja: $\Re$ = conjunto dos números reais

$\Re^+$ = conjunto dos números reais não negativos

Regra: $f(x) = x^2$

4º CASO: $f_4 : \Re^+ \rightarrow \Re^+$



É sobrejetora

É injetora

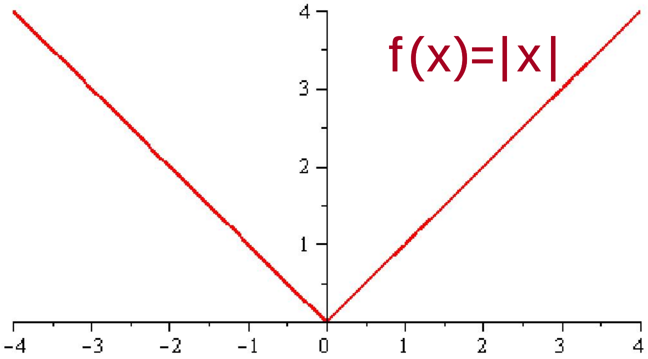
$\Downarrow$

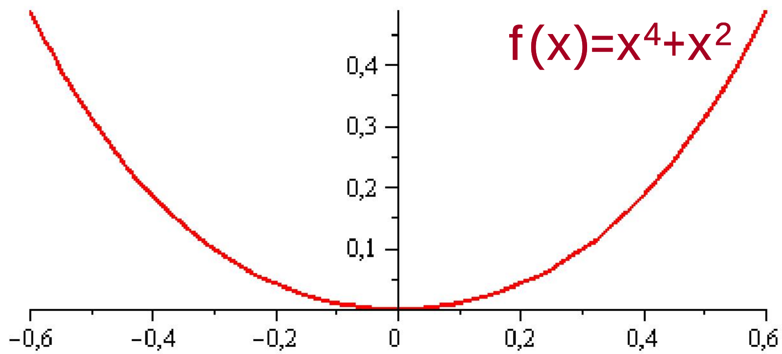
É bijetora

Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

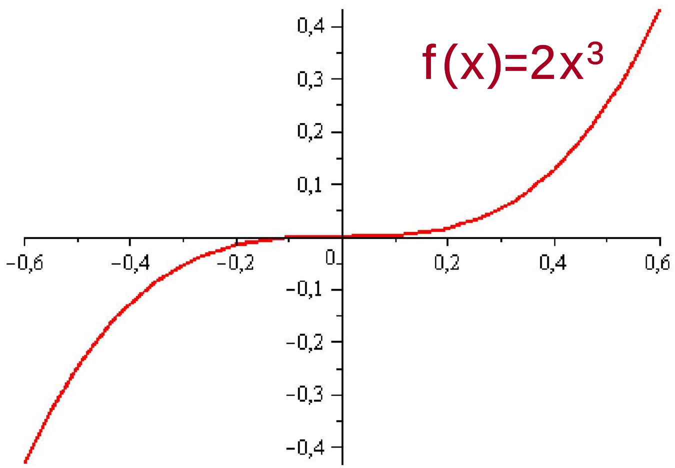
Outras Propriedades Especiais

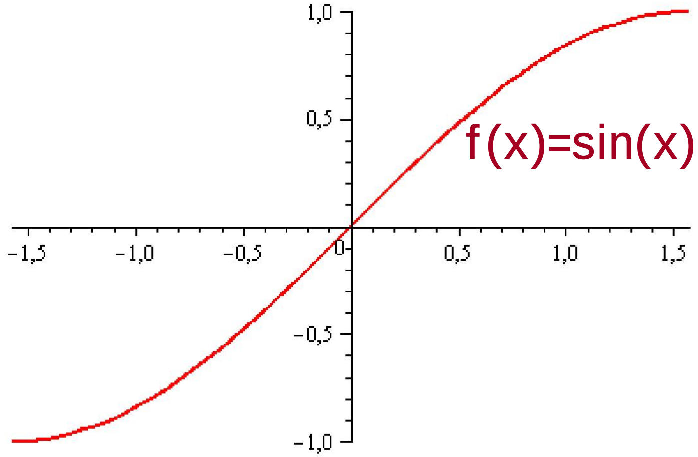
Função Par: **f(x)=f(-x)**





Função Ímpar: **f(x)=-f(-x)**

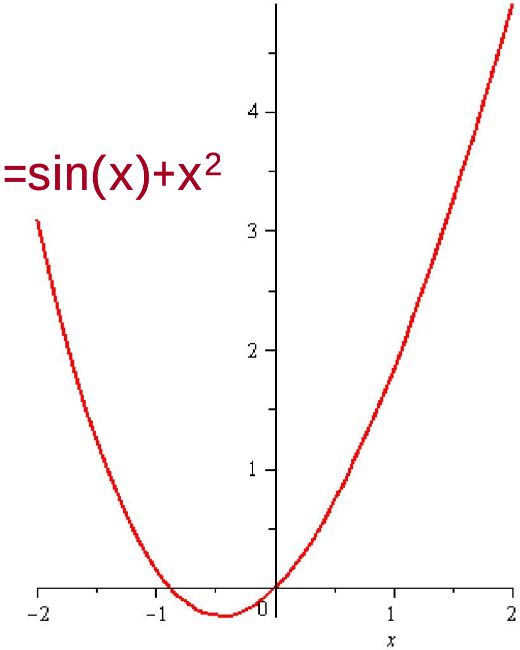




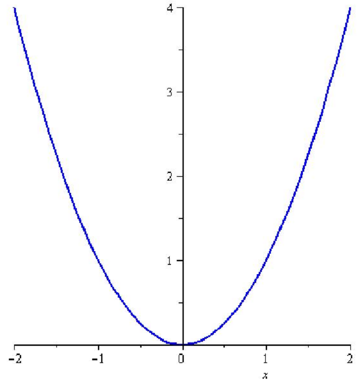
Outras Propriedades Especiais

Função nem par nem ímpar: $f(x) \neq f(-x)$ e $f(x) \neq -f(-x)$

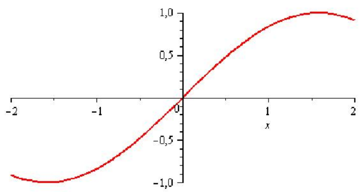
$f(x)=\sin(x)+x^2$



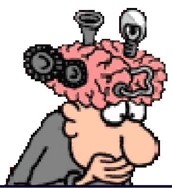
$g(x)=[f(x)+f(-x)]/2$



$h(x)=[f(x)-f(-x)]/2$



$f(x)=g(x)+h(x)$

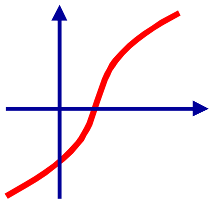


Toda função, na pior das hipóteses, pode ser escrita como a soma de uma função par com uma função ímpar.

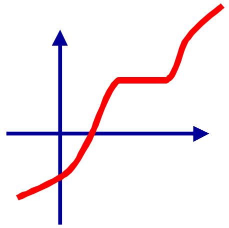
Funções Monotônicas

Uma função é denominada monotônica quando for crescente ou decrescente, ou estritamente crescente ou estritamente decrescente ou constante.

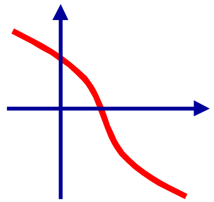
Estritamente Crescente: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$



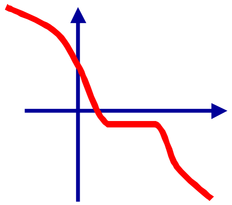
Crescente: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$



Estritamente Decrescente: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$



Decrescente: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$



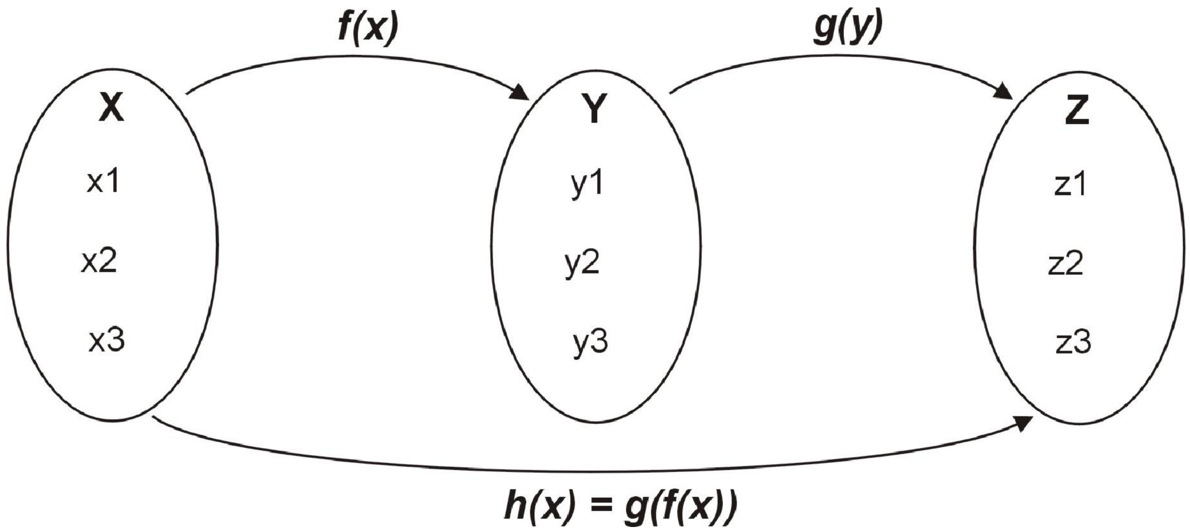
Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

Funções Compostas

Seja $f : X \to Y$ **e** $g : Y \to Z$

Define-se a *composição* de X em Z como $g \circ f : X \to Z$

Notação: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

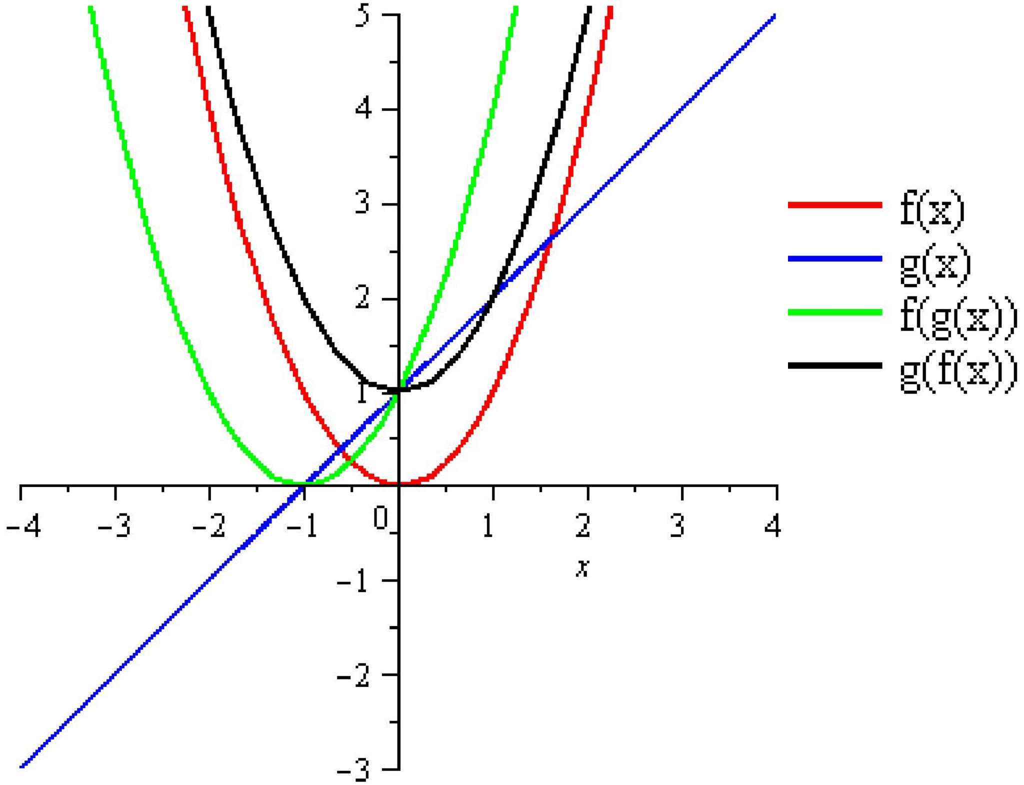


Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

Exemplo

Sejam: $f:\Re \rightarrow \Re,\ \boxed{f(x) = x^2}$ **e** $g:\Re \rightarrow \Re,\ \boxed{g(x) = 1 + x}$

Logo: $\boxed{g(f(x)) = 1 + x^2}$ **e** $\boxed{f(g(x)) = (1 + x)^2}$

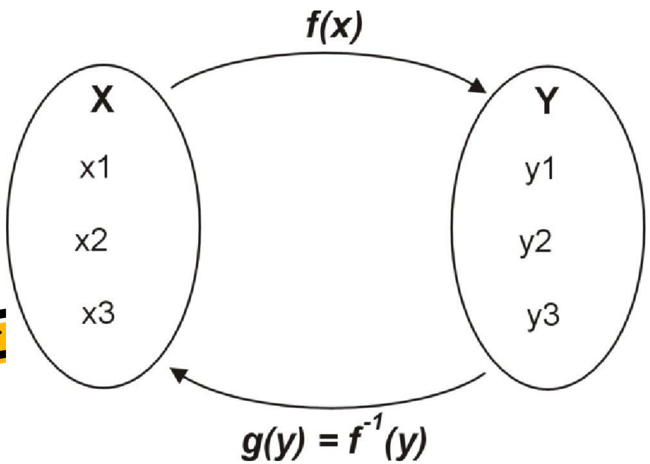


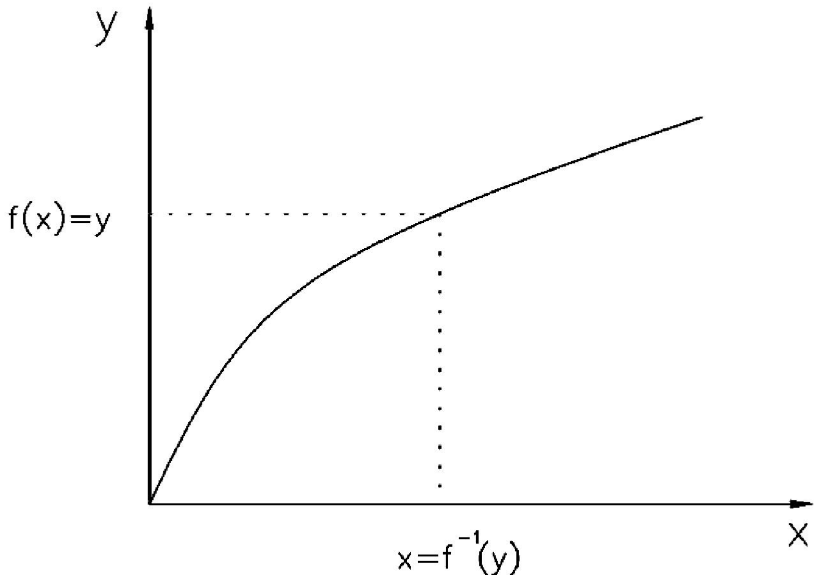
Funções Inversas

Sejam $f : X \to Y$ **e** $g : Y \to X$

Para todo $x \in X$ **se** $y = f(x)$ **então** $x = g(y)$ **e para todo** $y \in Y$ **se** $x = g(y)$ **então** $y = f(x)$ **.**

Notação: $g = f^{-1}$





Funções Inversas

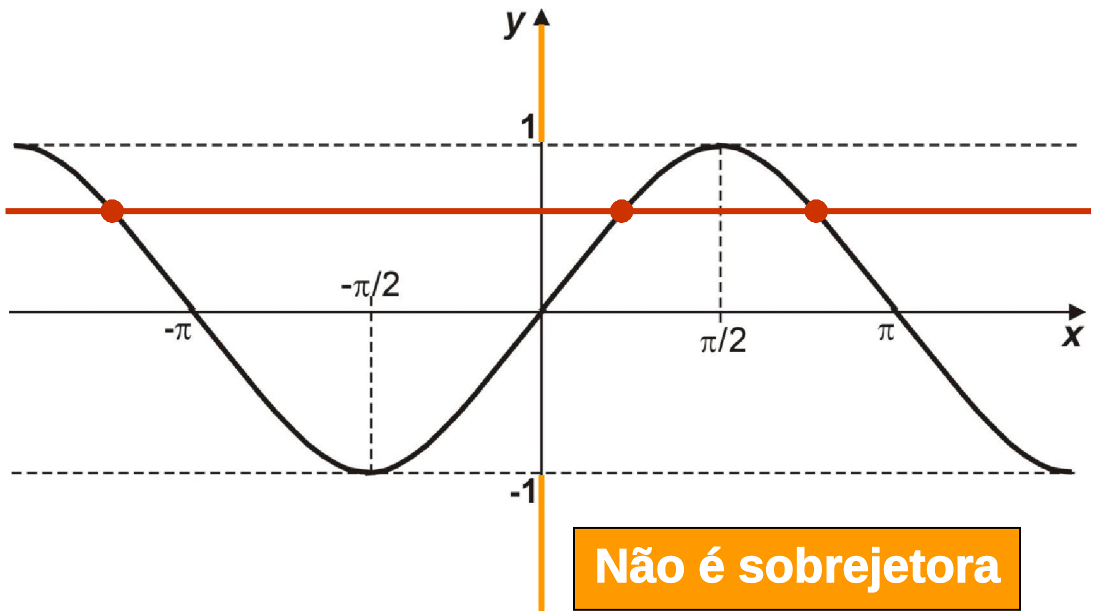
Pode-se demonstrar que:

$\boxed{f \text{ é bijetora}} \iff \boxed{f \text{ é invertível}}$

uma vez que funções bijetoras estabelecem uma correspondência biunívoca entre todos os elementos de X e de Y.

Exemplo

$$f : \Re \to \Re,\ f(x) = \sin x$$



Não é injetora

Não é sobrejetora

Não é invertível

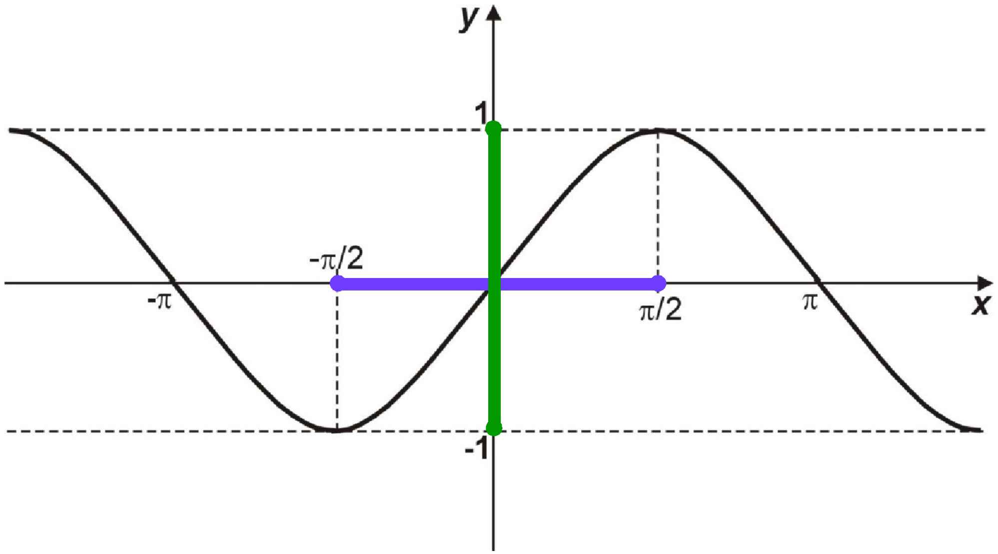
Exemplo

$$f : A \rightarrow B,\ f(x) = \sin x$$

onde: $\boxed{A = \{x : x \in \Re, -\pi/2 \leq x \leq \pi/2\}}$

$$\boxed{B = \{y : y \in \Re, -1 \leq y \leq 1\}}$$

$$\boxed{f^{-1}(y) = \arcsin(y)\ \ ou\ \sin^{-1}(y)}$$

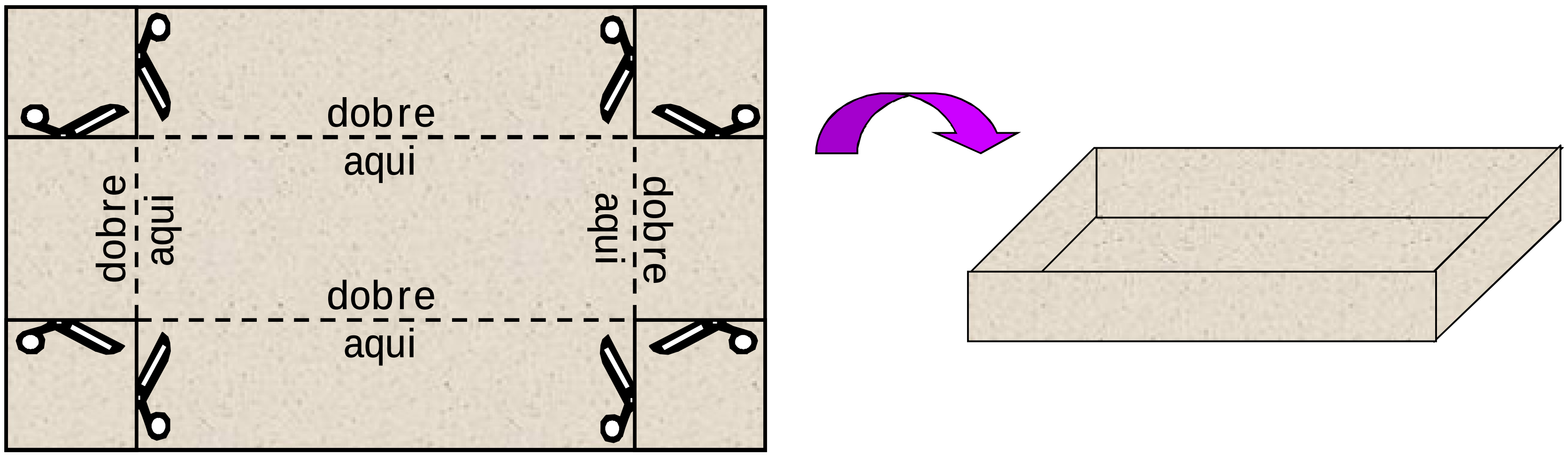


f **é bijetora**

f **é invertível**

Exercícios

Deseja-se construir uma caixa aberta a partir de uma folha de papel Ofício 2 cortando quadrados iguais nos cantos e dobrando os lados para cima (uma cola fantástica garantirá a junção de arestas, quando necessária), conforme esquematização abaixo.



Pede-se:

a) Escreva o volume V da caixa como uma função da medida do lado do quadrado de corte. Qual o domínio da função?

b) Estime um valor para a medida de corte que resulte em uma caixa de maior volume.

Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

Exercícios

Para o próximo Maceió Fest, a Prefeitura de Maceió, visando uniformizar o tamanho dos blocos, estabeleceu que o cordão de isolamento deve ter 200 m de comprimento. O bloco **Funanestru & Cia**, sob o comando do vocalista Eduardo Nobre, vai contratar 6 pessoas para montar o cordão de isolamento na forma especificada abaixo (um retângulo combinado com dois triângulos equiláteros).

Pede-se:

a) Escreva a área de ocupação do bloco na avenida em função da largura do mesmo. Qual o domínio da função?

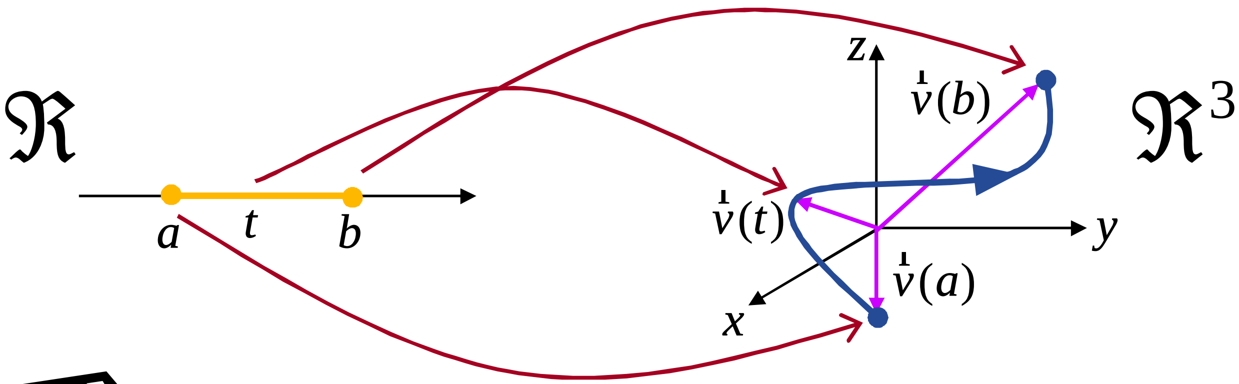
b) Sabendo-se que, em média, um animado folião precisa de um espaço de 0,8 m x 0,8 m para evoluir seus passos, estime o número máximo de abadás que podem ser vendidos.

Curvas

Representação paramétrica:

$$C: \Re \longrightarrow \Re^3$$

$$t \in [a,b] \longmapsto \vec{v}(t) = \begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{Bmatrix}$$



A representação paramétrica
cria uma curva orientada

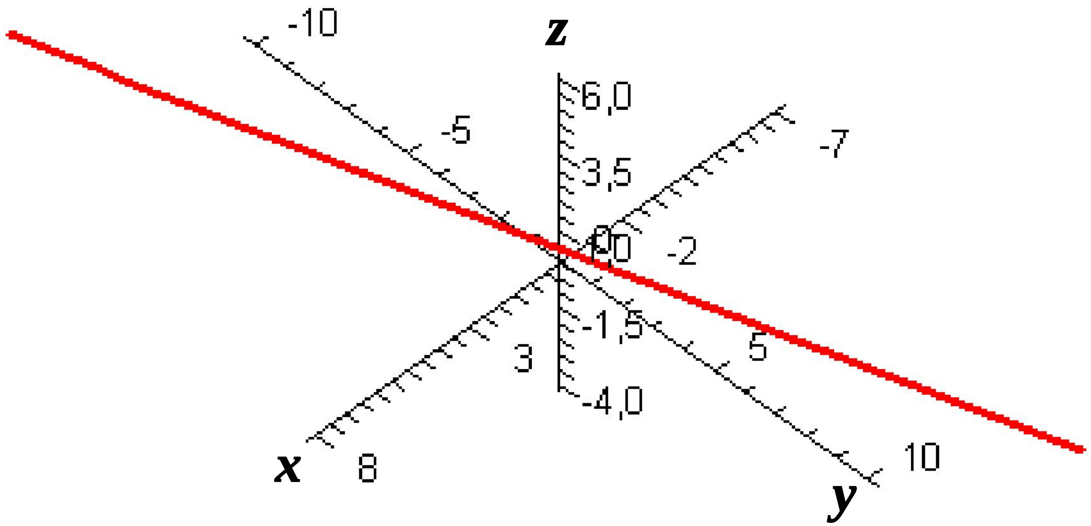
Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

Curvas

Exemplos:

- Linha reta $\quad \vec{v}(t) = \begin{Bmatrix} x_0 + \alpha t \\ y_0 + \beta t \\ z_0 + \gamma t \end{Bmatrix}$

Reta que passa pelo ponto (x_0, y_0, z_0) e que se desenvolve na direção do vetor (α, β, γ).



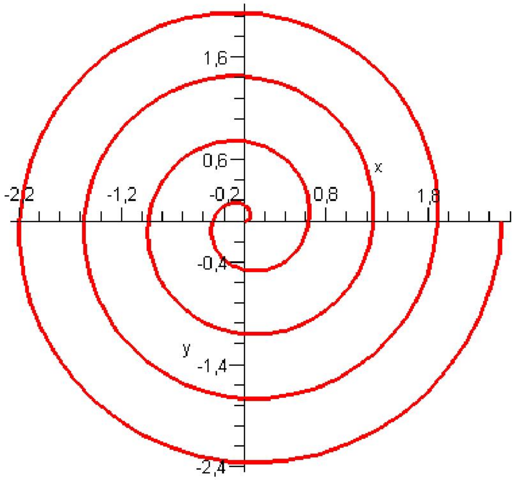
Reta passando pelo ponto *(8, -10, 6)* e possui a direção do vetor *(-3, 4, -2)*, com t variando no intervalo *[0, 5]*.

Curvas

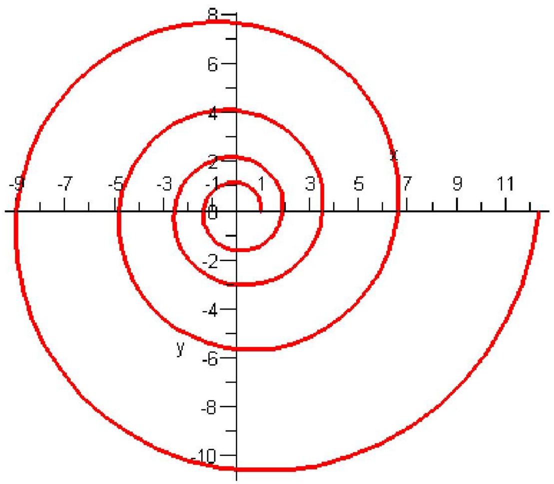
Exemplos:

- Espiral $$\vec{v}(t)=\begin{Bmatrix} f(t)\cos(t) \\ f(t)\sin(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

A escolha de $f(t)=a.t$, com o valor de a positivo leva a espiral de Arquimedes. A escolha de $f(t)=e^{a.t}$ leva a espiral logarítmica.



Espiral de Arquimedes
$f(t)=t/10$



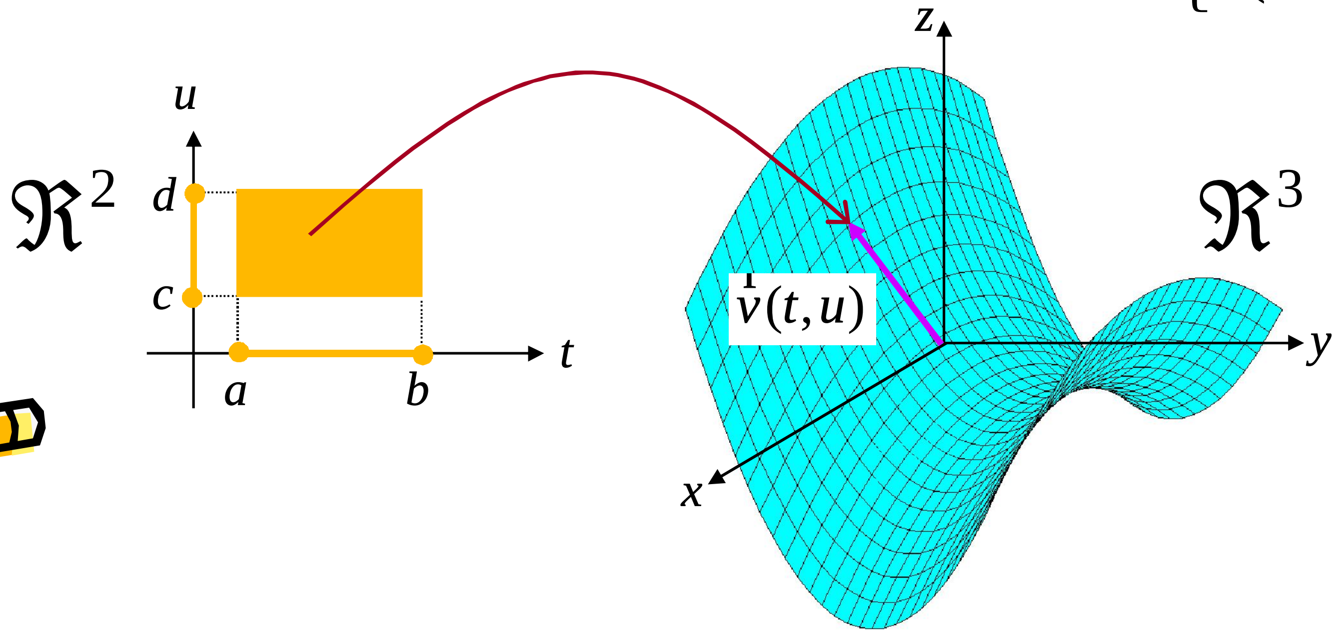
Espiral Logarítmica
$f(t)=e^{t/10}$

Superfícies

Representação paramétrica:

$$S:\ \Re^2 \longrightarrow \Re^3$$

$$(t,u) \in \left([a,b]\times[c,d]\right) \longmapsto \vec{v}(t,u) = \begin{Bmatrix} x(t,u) \\ y(t,u) \\ z(t,u) \end{Bmatrix}$$



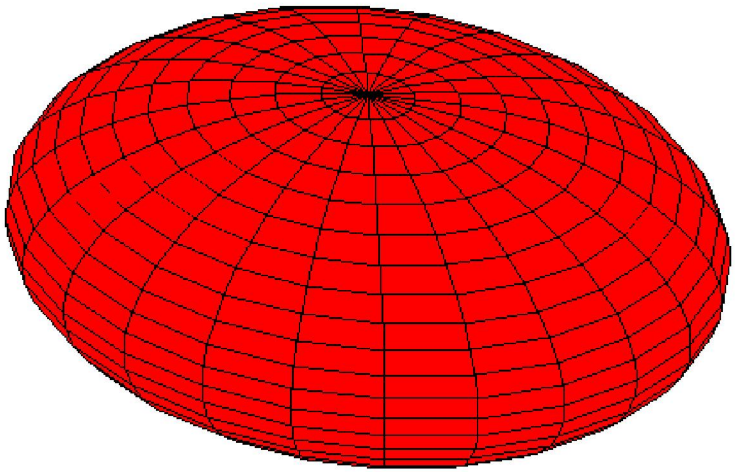
Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

Superfícies

Exemplos:

- Elipsóide $\vec{v}(t,u) = \begin{Bmatrix} a\sin t\cos u \\ b\sin t\sin u \\ c\cos t \end{Bmatrix}$

Os coeficientes a, b e c definem os semi-eixos do elipsóide centrado na origem. O domínio da função é $([0,\pi]x[0,2\pi])$.



Elipsóide centrado na origem e de semi-eixos 3, 4 e 2, respectivamente nas direções *x*, *y* e *z*.

Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

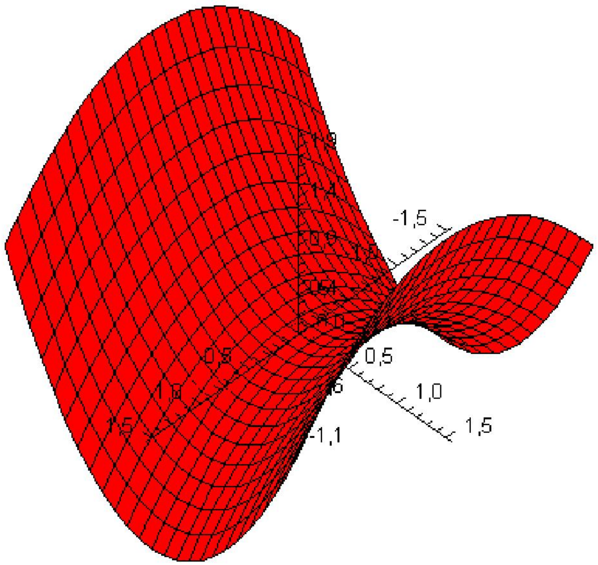
Superfícies

Exemplos:

- Parabolóide hiperbólico

$$\vec{v}(t,u)=\begin{Bmatrix} u \\ t \\ a^2t^2-b^2u^2 \end{Bmatrix}$$

As seções ortogonais ao eixo z são hipérboles e as seções ortogonais aos eixos x ou y são parábolas.



Parabolóide hiperbólico com a^2 igual a 0,9 e b^2 igual a 0,5.

Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL