4.2 Produto Vetorial

Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ no espaço, vamos definir um novo vetor, ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$, denotado por $\vec{u} \times \vec{v}$ (ou $\vec{u} \wedge \vec{v}$, em outros textos) e denominado *produto vetorial de $\vec{u}$ e $\vec{v}$*. Mas antes, precisamos introduzir o conceito de orientação no espaço.

4.2.1 Orientação geométrica

Orientação sobre uma reta r

Dada uma reta r em que fixamos arbitrariamente um ponto O, temos uma noção imediata de orientação da reta a partir da escolha de uma das semi-retas determinadas pelo ponto O como sendo o semi-eixo positivo.

Numa representação geométrica de r na posição horizontal, é usual convencionar como "orientação positiva" a escolha da semi-reta "à direita" do ponto O, que é sua origem.

Escolhendo a outra semi-reta, estaríamos com "orientação negativa".

Em linguagem vetorial, a escolha de um vetor diretor $\vec{v}$ da reta r determina automaticamente o sentido positivo (no sentido do vetor $\vec{v}$) e o sentido negativo (no sentido oposto de $\vec{v}$) da reta.

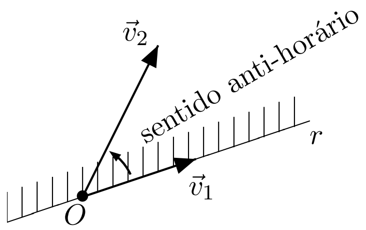
Por isso, dizemos que um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ determina a orientação de r.

Orientação do plano $\mathbb{R}^2$

Consideremos o plano $\mathbb{R}^2$. Dados um ponto O do plano e um par de vetores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ l.i., todos os pontos X do plano são dados pela equação vetorial $X = O + \lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Geometricamente, o ponto O e o vetor $\vec{v}_1$ determinam uma reta r contida no plano, que separa o plano em dois semi-planos.

Então, considerando os representantes dos vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ a partir de O, temos que o representante de $\vec{v}_2$ determina um único semi-plano que o contém.



O ângulo orientado medido no sentido de $\vec{v}_1$ para $\vec{v}_2$ (dentro do semi-plano) pode ser de duas uma:

☐ ou tem sentido horário (acompanhando o movimento dos ponteiros do relógio)

☐ ou tem sentido anti-horário.

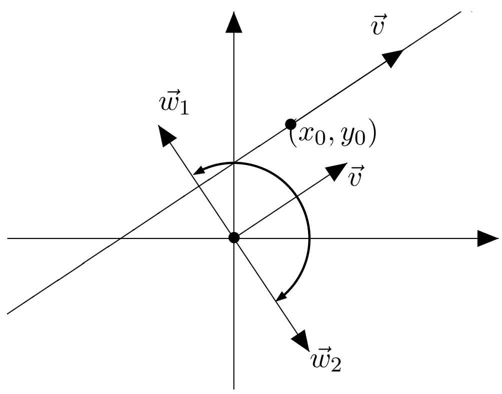
Na ilustração, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, nesta ordem, tem o ângulo orientado no sentido anti-horário.

Convenciona-se que uma base l.i. de geradores do plano tem "orientação positiva"quando o ângulo orientado no sentido da ordem dos vetores da base tem o sentido anti-horário.

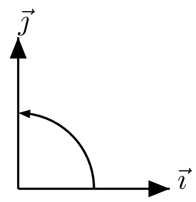
Exemplo 1: A base canônica $\mathcal{C} = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$ do plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ tem orientação positiva.

Exemplo 2: Vimos anteriormente que dada uma reta $r : X = (x_0, y_0) + t(a, b)$, $t \in \mathbb{R}$, com $\vec{v} = (a, b) \neq (0, 0)$, a direção de uma reta perpendicular a r poderia ser dada por $\vec{w}_1 = (-b, a)$ ou $\vec{w}_2 = (b, -a) = -\vec{w}_1$.

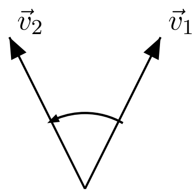
Os conjuntos $\mathcal{B}_1 = \{\vec{v}, \vec{w}_1\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{\vec{v}, \vec{w}_1\}$ formam ambos bases ortogonais de $\mathbb{R}^2$, porém, $\mathcal{B}_1$ é base positiva e $\mathcal{B}_2$ é base negativa, conforme podem ser verificados por meio de ângulos orientados.



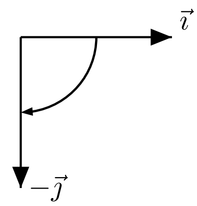
Em geral, em $\mathbb{R}^2$, uma base é positiva se possui a mesma orientação da base canônica $\mathcal{C} = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$.



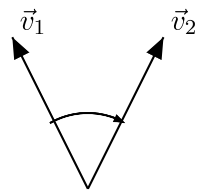
orientação positiva



orientação positiva



orientação negativa



orientação negativa

Um critério algébrico para checar se a escolha de uma base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ é positiva ou negativa, é o critério do determinante, como segue.

Sejam $\vec{v}_1 = (a, b)$ e $\vec{v}_2 = (c, d)$ dados num sistema de coordenadas cartesianas.

A matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ cujas linhas são as coordenadas dos vetores, tem determinante não nulo, já que os vetores são l.i.

Se $\det(A) > 0$ a base $\mathcal{B}$ tem a mesma orientação da base canônica do sistema, isto é, tem orientação positiva. Se $\det(A) < 0$, a base terá orientação negativa.

No exemplo das bases ortogonais, $\left\|\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}\right\| = a^2 + b^2 > 0$ donde a base $\{\vec{v}, \vec{w}_1\}$ é positiva e $\left\|\begin{vmatrix} a & b \\ b & -a \end{vmatrix}\right\| = -(a^2 + b^2) < 0$, donde a base $\{\vec{v}, \vec{w}_2\}$ é negativa.

Mais geralmente, se (a, b) e (c, d) são as coordenadas dos vetores de uma base $\mathcal{B}_1$ dados em relação a uma base $\mathcal{B}$, a orientação definida por $\mathcal{B}_1$ é a mesma orientação definida por $\mathcal{B}$ se $\left\|\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\right\| > 0$.

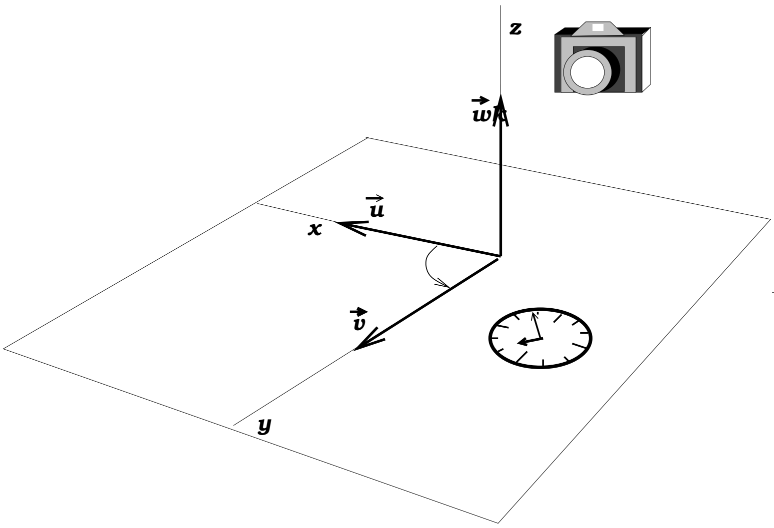
Orientação geométrica no espaço

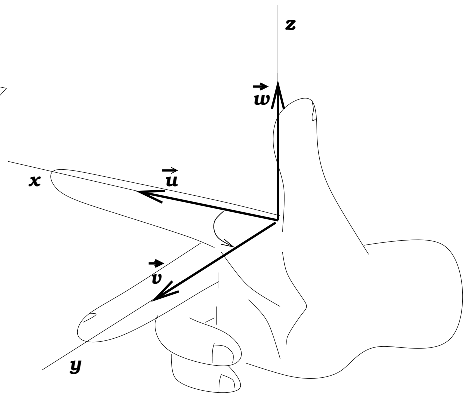
Consideremos inicialmente dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ no espaço, linearmente independentes. Fixando arbitrariamente um ponto O no espaço, podemos considerar o plano passando por O e com direções geradas pelos vetores.

Tal plano determina no espaço dois semi-espaços. Seja $\vec{w}$ um terceiro vetor, não coplanar com $\vec{u}$ e $\vec{v}$. A semi-reta positiva considerando O e $\vec{w}$ determina a escolha de um dos semi-espaços.

O conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ nesta situação geométrica forma uma base de vetores do espaço, pois os vetores são não coplanares.

Essa base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ terá orientação positiva se, colocando o observador no semi-espaço escolhido, a orientação no plano de $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ for positiva (ângulo orientado de $\vec{u}$ a $\vec{v}$ no sentido anti-horário). O observador no outro semi-espaço deve "enxergar"a orientação no sentido anti-horário, pois a base $\{\vec{u}, \vec{v}, -\vec{w}\}$ será negativa.





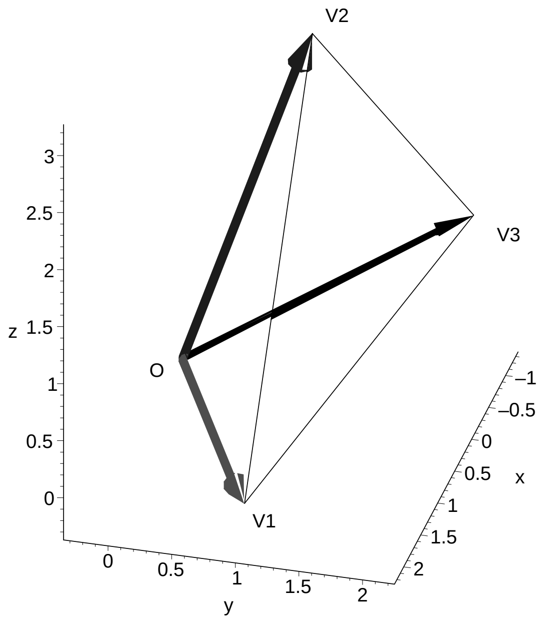
Na literatura, é muito usada a versão da "regra da mão direita": abra a sua mão direita, espalmada, e alinhe o representante do primeiro vetor, digamos $\vec{u}$, com o dedo indicador. Dobre o dedo médio, como na figura acima, alinhando com o vetor $\vec{v}$. O sentido de $\vec{u}$ para $\vec{v}$ fica de acordo com o fechar da mão. Se o polegar puder ser alinhado com a direção de $\vec{w}$, então a base é positiva. Caso contrário, a base é negativa.

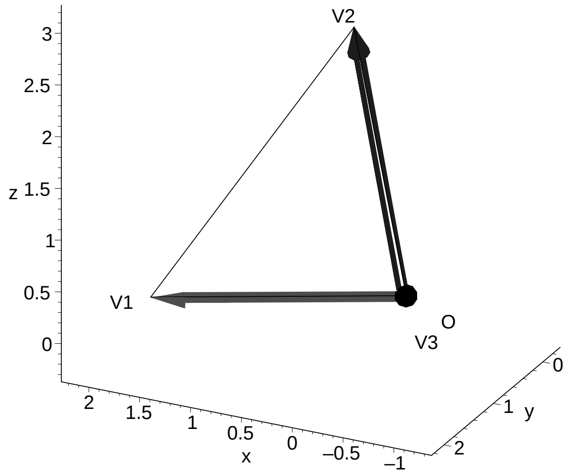
Exemplo 1: A base canônica $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ é uma base com orientação positiva. Assim como as bases $\{\vec{\jmath}, \vec{k}, \vec{\imath}\}$ e $\{\vec{k}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$

Exemplo 2: As bases $\{\vec{\jmath}, \vec{\imath}, \vec{k}\}$, $\{\vec{\imath}, \vec{k}, \vec{\jmath}\}$, $\{\vec{k}, \vec{\jmath}, \vec{\imath}\}$ são bases negativamente orientadas.

Assim como no caso de bases no plano, a orientação da base pode ser obtida pelo determinante da matriz cujas linhas (ou colunas) são as coordenadas dos vetores. Se o determinado é positivo, a nova base tem a mesma orientação da base que geraram as coordenadas. Caso contrário, a orientação é invertida.

Exemplo 3: A base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1 = (2, 1, 0), \vec{v}_2 = (0, 1, 3), \vec{v}_3 = (-1, 2, 1)\}$, cujos vetores foram dados em relação à base canônica (base positiva), tem a matriz $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ com determinante $-13 < 0$. Logo a base $\mathcal{B}$ tem orientação negativa. Veja na ilustração os vetores dados, sendo que a figura à direita representa a vista com o observador na extremidade final do vetor $\vec{v}_3$ que foi visualizada num ponto.





Pode-se observar que olhando do semi-espaço determinado pelo vetor $\vec{v}_3$, a orientação de $\{\vec{v}_1\vec{v}_2\}$ no plano por eles definido em O é horária, e portanto, a orientação da base no espaço $\mathcal{B}$ é negativa.

Para usar o dedo indicador como $\vec{v}_1$, o médio como $\vec{v}_2$ e o polegar como $\vec{v}_3$ seria necessário utilizar a mão esquerda, indicando que a base é negativa.

É claro que o critério algébrico usando determinantes é mais fácil de ser aplicado do que os que envolvem visualização geométrica, se os vetores da base forem dados em coordenadas. Mas se os vetores forem dados pela descrição geométrica, pode ser mais fácil usar os critérios geométricos.

4.2.2 Definição geométrica do produto vetorial

Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ no espaço, podemos definir um terceiro vetor, chamado de *produto vetorial de $\vec{u}$ por $\vec{v}$.*

Ao contrário do produto escalar, que resulta num escalar, e pode ser definido em vetores do espaço e em vetores do plano, o produto vetorial só pode ser definido em vetores do espaço pois está ligado essencialmente ao conceito de orientação no espaço.

O produto vetorial de $\vec{u}$ por $\vec{v}$, denotado por $\vec{u} \times \vec{v}$ (ou $\vec{u} \wedge \vec{v}$) é definido como:

- vetor nulo $\vec{0}$ se $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ for l.d.;

- um vetor não nulo tal que:

i) seu módulo é $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \operatorname{sen} \measuredangle(\vec{u}, \vec{v})$

ii) sua direção é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$ (simultaneamente)

iii) o sentido é tal que $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}\}$ é base positivamente orientada do espaço.

Portanto, $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$ se, e somente se, $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ for l.i. e temos mais um critério para verificar se 2 vetores no espaço são l.i.

A condição (2) determina o módulo, a direção e o sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$ e portanto a definição caracteriza completamente o vetor.

4.2.3 Propriedades

Pode-se deduzir, a partir da definição geométrica do produto vetorial, as seguintes propriedades:

1. $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$, qualquer se seja $\vec{u}$.

2. $\vec{0} \times \vec{u} = \vec{0}$, qualquer se seja $\vec{u}$.

3. $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$ (propriedade anti-comutativa)
   Por isso, dados $\vec{u}$, $\vec{v}$ l.i., a base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}\}$ é positiva e a base $\{\vec{v}, \vec{u}, \vec{u} \times \vec{v}\}$ é negativa.

4. $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$ (propriedade distributiva em relação à soma)

5. $(\lambda\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u} \times \vec{v})$ (propriedade linear em relação à multiplicação por escalar).

6. $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$ e $\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$.

7. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são unitários e ortogonais, então $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}\}$ é base ortonormal positiva.

Exceto pela propriedade (4), as demonstrações são simples e ficam a cargo do leitor.

A propriedade (4) será demonstrada mais tarde.

Com base nessas propriedades, podemos deduzir o cálculo do produto vetorial de dois vetores dados em coordenadas em relação à base canônica.

4.2.4 Cálculo do produto vetorial, em coordenadas

Consideremos a base canônica de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C} = \{\vec{\imath} = (1,0,0), \vec{\jmath} = (0,1,0), \vec{k} = (0,0,1)\}$.

Usando a definição de procuto vetorial, temos que:

$$\begin{array}{lll} \vec{\imath} \times \vec{\imath} = \vec{0} & \vec{\jmath} \times \vec{\imath} = -\vec{k} & \vec{k} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath} \\ \vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{k} & \vec{\jmath} \times \vec{\jmath} = \vec{0} & \vec{k} \times \vec{\jmath} = -\vec{\imath} \\ \vec{\imath} \times \vec{k} = -\vec{\jmath} & \vec{\jmath} \times \vec{k} = \vec{\imath} & \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0} \end{array}$$

Confira como exercício que as expressões acima verificam efetivamente as condições da definição.

$\mathcal{C}$ sendo uma base de $\mathbb{R}^3$, qualquer vetor $\vec{u}$ se expressa como $\vec{u} = a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{k}$. Se $\vec{v} = b_1\vec{\imath} + b_2\vec{\jmath} + b_3\vec{k}$ é outro vetor, o produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$ é expresso em coordenadas. Vamos obter as coordenadas, estendendo por linearidade, como permitem as propriedades anteriomente citadas:

$\vec{u} \times \vec{v} = (a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{k}) \times (b_1\vec{\imath} + b_2\vec{\jmath} + b_3\vec{k}) =$

$$\begin{array}{ccccccc} a_1b_1(\vec{\imath} \times \vec{\imath}) & + & a_1b_2(\vec{\imath} \times \vec{\jmath}) & + & a_1b_3(\vec{\imath} \times \vec{k}) & + \\ a_2b_1(\vec{\jmath} \times \vec{\imath}) & + & a_2b_2(\vec{\jmath} \times \vec{\jmath}) & + & a_2b_3(\vec{\jmath} \times \vec{k}) & + \\ a_3b_1(\vec{k} \times \vec{\imath}) & + & a_3b_2(\vec{k} \times \vec{\jmath}) & + & a_3b_3(\vec{k} \times \vec{k}) & = \\ a_1b_1(\vec{0}) & + & a_1b_2(\vec{k}) & + & a_1b_3(-\vec{\jmath}) & + \\ a_2b_1(-\vec{k}) & + & a_2b_2(\vec{0}) & + & a_2b_3(\vec{\imath}) & + \\ a_3b_1(\vec{\jmath}) & + & a_3b_2(-\vec{\imath}) & + & a_3b_3(\vec{0}) & \end{array}$$

Logo, $\vec{u} \times \vec{v} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{\imath} - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{\jmath} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$, que corresponde ao cálculo do determinante "simbólico" $\begin{Vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{Vmatrix} \vec{\imath} - \begin{Vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{Vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{Vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{Vmatrix} \vec{k}$.

Dizemos "simbólico"porque a matriz não é numérica e portanto, apenas a forma de calcular é que corresponde ao do cálculo do determinante. Esta representação simbólica auxilia apenas o cálculo de $\vec{u} \times \vec{v}$ em coordenadas.

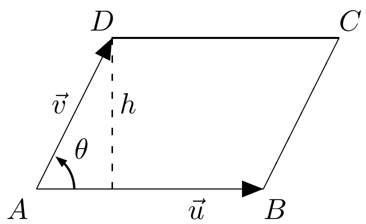
Exemplo: Vamos calcular o produto vetorial de $\vec{u} = (1,2,3)$ por $\vec{v} = (4,5,6)$:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{Vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{Vmatrix} \vec{\imath} - \begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{Vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{Vmatrix} \vec{k} = (-3, 6, -3)$$

4.2.5 Algumas aplicações do produto vetorial

Cálculo de áreas

O módulo de $\vec{u} \times \vec{v}$, quando $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são l.i. representa a área do paralelogramo $ABCD$ com $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ e $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$.



Área$(ABCD)$ = comprimento$(AB).h$,

onde comprimento(AB) = $|\overrightarrow{AB}| = |\vec{u}|$.

Sendo $\theta = \measuredangle(\vec{u}, \vec{v})$, temos que h = (comprimento$(AD)\operatorname{sen}\theta$

em que comprimento(AD)= $|\overrightarrow{AD}| = |\vec{v}|$.

Logo, $\boxed{\text{Área}(ABCD) = |\vec{u}||\vec{v}|\operatorname{sen}\theta = |\vec{u} \times \vec{v}|.}$

Consequentemente, a área do triângulo ABC pode ser calculado como $\dfrac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2}$.

Por exemplo, o triângulo ABC onde $A = (1,2,0)$, $B = (2,3,1)$ e $C = (1,0,4)$ tem área dada por $\dfrac{|(1,1,1) \times (-1,-3,3)|}{2} = \dfrac{|(6,-4,-2)|}{2} = \dfrac{|2(3,-2,-1)|}{2} = \sqrt{14}$. A área do paralelogramo $ABDC$ onde $D = A + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, é $2\sqrt{14}$.

Cálculo da equação geral do plano dado vetorialmente

Seja o plano $\pi : X = A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, onde $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$ e $A = (x_0, y_0, z_0)$.

A equação geral desse plano foi inicialmente calculada fazendo $\{\overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v}\}$ l.d. e portanto

$$\begin{Vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{Vmatrix} = 0.$$

Ou seja, $\begin{Vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{Vmatrix}(x - x_0) - \begin{Vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{Vmatrix}(y - y_0) + \begin{Vmatrix} a_1 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{Vmatrix}(z - z_0) = 0$ é a equação geral do plano π.

Mas como $\left(\begin{Vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{Vmatrix}, -\begin{Vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} a_1 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{Vmatrix}\right) = \vec{u} \times \vec{v}$, a equação acima diz que $\vec{u} \times \vec{v}$ é perpendicular a $\overrightarrow{AX} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ para todo $X \in \pi$.

Ou seja, calcular o vetor normal $\vec{u} \times \vec{v}$ e obter a equação geral de π fazendo $\overrightarrow{AX} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$ é equivalente a impor que $\{\overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v}\}$ é l.d, fazendo $\begin{Vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{Vmatrix} = 0.$

Exemplo: Se $\pi : X = (1,2,0) + \lambda(2,1,3) + \mu(0,2,3),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ é nosso plano, podemos calcular $\vec{w} = (2,1,3)\times(0,2,3)$ calculando o determinante simbólico $\begin{Vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{Vmatrix} = (3-6)\vec{\imath}-(6-0)\vec{\jmath}+(4-0)\vec{k} = -3\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} + 4\vec{k} = (-3,-6,4)$.

Então a equação geral do plano π pode ser dada por $-3(x-1) - 6(y-2) + 4z = 0$.

Esta equação também pode ser obtida fazendo $\begin{Vmatrix} x-1 & y-2 & z-0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{Vmatrix} = 0.$

Ortogonalização de bases no espaço

Dada uma base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ no espaço, tem situações em que se deseja contruir uma base ortonormal $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ tal que $\vec{e}_1$ seja colinear com $\vec{u}$ e $\vec{e}_2$ coplanar com $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Claro que $\vec{e}_1 = versor(\vec{u}) = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$

Como $\vec{e}_3$ deve ser ortogonal a $\vec{e}_1$ e a $\vec{e}_2$, e estes são coplanares com $\vec{u}$ e $\vec{v}$, temos que $\vec{e}_3$ é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e portanto, podemos considerar $\vec{e}_3$ como o versor de $\vec{u} \times \vec{v}$.

Tendo $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_3$, podemos escolher $\vec{e}_2$ como sendo $\vec{e}_3 \times \vec{e}_1$, se quisermos base positiva. Temos que $\vec{e}_2$ é coplanar com $\vec{u}$ e $\vec{v}$ pois os vetores com essa propriedade são os vetores ortogonais a $\vec{u} \times \vec{v}$ que tem a mesma direção que $\vec{e}_3$, e $\vec{e}_2$ é ortogonal a $\vec{e}_3$.

Por exemplo, se $\vec{u} = (1,2,1)$, $\vec{v} = (1,-1,2)$ e $\vec{w} = (-3,2,1)$, teremos:

- $\vec{e}_1 = \dfrac{(1,2,1)}{\sqrt{6}}$,

- Inicialmente, calculamos $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{Vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{Vmatrix} = 5\vec{\imath} - \vec{\jmath} - 3\vec{k} = (5,-1,-3)$.

  Então $\vec{e}_3 = \dfrac{(5,-1,-3)}{\sqrt{35}}$

- $\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{35}}\dfrac{1}{\sqrt{6}}(5,-1,-3)\times(1,2,1) = \dfrac{(5,-8,11)}{\sqrt{210}}$.

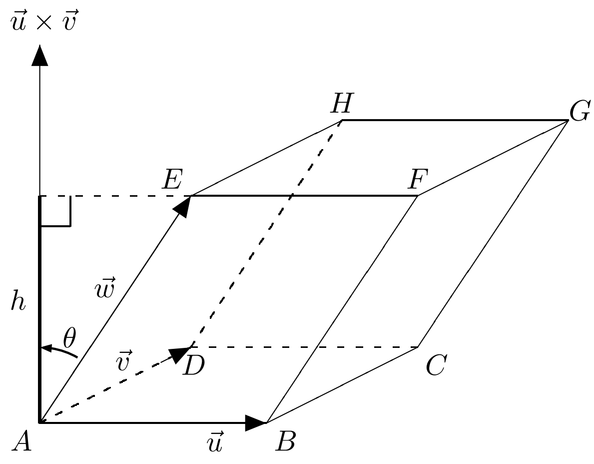
Este processo NÃO é o Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt estudado em Álgebra Linear, que obtém o mesmo resultado sem utilizar produtos vetoriais, somente com produtos escalares e que, por isso mesmo, se estende para outras dimensões.

Lembramos que para obter as coordenadas dos vetores na nova base ortonormal, basta fazer $\vec{v} = (v\cdot\vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{v}\cdot\vec{e}_2)\vec{e}_2 + (\vec{v}\cdot\vec{e}_3)\vec{e}_3$.
Além disso, $(v\cdot\vec{e}_i)\vec{e}_i$ é a projeção ortogonal de $\vec{v}$ na direção de $\vec{e}_i$ e $(v\cdot\vec{e}_i)\vec{e}_i + (\vec{v}\cdot\vec{e}_j)\vec{e}_j$ é a projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre o plano dado pelos vetores $\vec{e}_i$ e $\vec{e}_j$ $(i,j\in\{1,2,3\})$. Represente os vetores a partir de um único ponto A para enxergar a geometria.

4.3 Produto misto e o volume do paralelepípedo

Dados 3 vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, o *produto misto* desses vetores definido como o escalar $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w})$ e é denotado por $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$.

Se $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ for base positiva, o produto misto $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ representa o volume do paralelepípedo de arestas $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ com vértice em um ponto A qualquer do espaço.



De fato:
Vimos que $|\vec{u}\times\vec{v}|$ representa a área do paralelogramo da base $ABCD$, onde $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$.
Além disso, a altura h é medida pela projeção ortogonal de $\vec{w}$ sobre $\vec{u}\times\vec{v}$, sendo portanto $h = \vec{w}\cos\theta$, onde $\theta = \measuredangle(\vec{w},\vec{u}\times\vec{v})$.
Então o volume do paralelepípedo é $area(ABCD)\cdot h = |\vec{u}\times\vec{v}||\vec{w}|\cos\theta = (\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w} = [\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$.

Se $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ for base negativa, o produto misto $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ é negativo e seu módulo é o volume do paralelepípedo. O produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$ estará no semi-plano oposto ao do paralelepípedo $ABCDEFGH$, em relação à base $ABCD$ formada por $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Observe que $\{\vec{u}, \vec{v}, -\vec{w}\}$ será base positiva e o paralelepípedo correspondente a ela terá volume $[\vec{u}, \vec{v}, -\vec{w}]$. Este paralelepípedo tem o mesmo volume do anterior. Da propriedade de produto escalar, segue que o volume é $-[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

Portanto, $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ representa o volume do paralelepípedo, a menos de sinal.

Em coordenadas, se $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$, temos que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ é o determinante da matriz cujas linhas são as coordenadas dos vetores.

De fato,

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \left(\begin{Vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{Vmatrix}, - \begin{Vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{Vmatrix} \right) \cdot (w_1, w_2, w_3) =$$

$$= w_1 \begin{Vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{Vmatrix} - w_2 \begin{Vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{Vmatrix} + w_3 \begin{Vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v2 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{Vmatrix}$$

.

Consequentemente, $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$ se, somente se, $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ l.d. Isto generaliza a definição de volume do paralelepípedo por produto misto para paralelepípedos degenerados, lembrando que quando os vetores são l.d., o “paralelepípedo”se achata num plano, dando volume nulo.

Exemplo 1: Vamos calcular o volume do paralelepípedo $ABCDEFGH$ como na figura anterior, onde $.A = (1, 2, 0)$, $B = (0, 1, 2)$, $D = (1, 1, 3)$ e $E = (2, 3, 5)$.
Temos $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-1, -1, 2)$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD} = (0, -1, 3)$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AE} = (1, 1, 5)$. Assim, o volume do paralelepípedo é $|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$. Como $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{Vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{Vmatrix} = 7$, tem-se que o volume é $7u^3$, onde u é a unidade de medida utilizada..
Como o produto misto é positivo, temos também que $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é uma base positiva no espaço.
O volume do tetraedro $ABDE$ é $\frac{1}{6} Volume(paralelepipedo) = \frac{7}{6}$

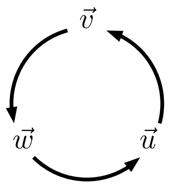
4.3.1 Propriedades de determinantes versus procuto escalar

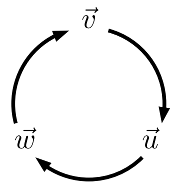
1. Se trocarmos duas linhas de uma matriz entre si, o determinante muda de sinal. Trocando duas vezes, volta ao original.

   Consequentemente, $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = -[\vec{v},\vec{u},\vec{w}] = -[\vec{w},\vec{v},\vec{u}] = -[\vec{u},\vec{w},\vec{v}] = [\vec{v},\vec{w},\vec{u}] = [\vec{w},\vec{u},\vec{v}]$.

   Isto é equivalente às bases $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$, $\{\vec{v},\vec{w},\vec{u}\}$ e $\{\vec{w},\vec{u},\vec{v}\}$ terem a mesma orientação, assim como as bases $\{\vec{v},\vec{u},\vec{w}\}$, $\{\vec{u},\vec{w},\vec{v}\}$ e $\{\vec{w},\vec{v},\vec{u}\}$, com orientações contrárias às do primeiro grupo.

   Para memorização, veja o esquema da figura abaixo:

   $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$, $\{\vec{v},\vec{w},\vec{u}\}$ e $\{\vec{w},\vec{u},\vec{v}\}$
   no mesmo sentido da seta

   ◀▶

   $\{\vec{u},\vec{w},\vec{v}\}$, $\{\vec{w}\vec{v},\vec{u}\}$ e $\{\vec{v},\vec{u},\vec{w}\}$
   no sentido da seta ao contrário

2. $[\vec{u}_1+\vec{u}_2,\vec{v},\vec{w}] = [\vec{u}_1,\vec{v},\vec{w}] + [\vec{u}_2,\vec{v},\vec{w}]$, $\vec{u},\vec{v}_1+\vec{v}_2,\vec{w}] = [\vec{u},\vec{v}_1,\vec{w}] + [\vec{u},\vec{v}_2,\vec{w}]$ e $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}_1+\vec{w}_2] = [\vec{u},\vec{v},\vec{w}_1] + [\vec{u},\vec{v},\vec{w}_2]$, das propriedades de produto vetorial e escalar (prove!). Isto corresponde à propriedade dos determinantes que, se uma linha L_i [ou coluna C_j] da matriz pode ser escrita como uma soma $L_i^1 + L_i^2$ [ou $C_i^1 + C_i^2$], o determinante da matriz é uma soma de dois determinantes, como no exemplo:

   $$\left\|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4+5 & 6+7 & 8+9 \\ 10 & 11 & 12 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{matrix}\right\|$$

3. A propriedade $[\lambda\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = [\vec{u},\lambda\vec{v},\vec{w}] = [\vec{u},\vec{v},\lambda\vec{w}]$ (prove!), corresponde à propriedade dos determinantes, de que se multiplicarmos uma linha [ou coluna]de uma matriz quadrada por um escalar λ, temos que o determinante da nova matriz é $\lambda \det A$. A propriedade de determinantes vale para qualquer ordem da matriz.

   Consequentemente, se A é uma matriz $n \times n$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$, já que multiplicamos n linhas por λ.

   Geometricamente, se multiplicarmos o comprimento de uma aresta de uma paralelepípedo por $\lambda > 0$ (ampliação se $\lambda > 1$ ou redução se $0 < \lambda < 1$), o volume será multiplicado pelo mesmo fator λ.

4. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$ se dois dos vetores são múltiplos entre si (logo o conjunto é l.d.). Numa matriz quadrada, se duas linhas [ou colunas] são múltiplas uma da outra, o determinante é 0.

   Na verdade, isto é só um caso particular de linhas [ou colunas] l.d., em que uma delas é combinação linear das outras.

   Exercício: Mostre que $[\vec{u}, \vec{v}, \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}] = 0$.

Observe que a definição da relação entre $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ e o volume de um paralelepípedo não dependeu de coordenadas. Assim como o fato de que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]$ e portanto $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ (*). Além disso, para o produto escalar já foi visto que $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{a} = \vec{u} \cdot \vec{a} + \vec{v} \cdot \vec{a}$ (**).

Assim, podemos utilizar os fatos acima para demonstrar a propriedade do produto vetorial: $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$.

De fato:

Considere uma base ortonormal $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ do espaço. Como os vetores são escritos de maneira única nesta base, basta mostrar que $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w}$ e $\vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$ têm as mesmas coordenadas (x, y, z). Como a base é ortonormal, essas coordenadas de um vetor se expressam em termos de produto escalar (lembrando que $\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{\imath}, \vec{v} \cdot \vec{\jmath}, \vec{v} \cdot \vec{k})$). Ou seja, basta mostrar que

$$
\begin{aligned}
x &= ((\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w}) \cdot \vec{\imath} = (\vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{\imath} = (\vec{u} \times \vec{w}) \cdot \vec{\imath} + (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{\imath} \\
y &= ((\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w}) \cdot \vec{\jmath} = (\vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{\jmath} = (\vec{u} \times \vec{w}) \cdot \vec{\jmath} + (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{\jmath} \\
z &= ((\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w}) \cdot \vec{k} = (\vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{k} = (\vec{u} \times \vec{w}) \cdot \vec{k} + (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{k}
\end{aligned}
$$

Mas $x = ((\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w}) \cdot \vec{\imath} \overset{*}{=} (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{w} \times \vec{\imath}) \overset{**}{=} \vec{u} \cdot (\vec{w} \times \vec{\imath}) + \vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{\imath}) \overset{*}{=} (\vec{u} \times \vec{w}) \cdot \vec{\imath} + (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{\imath}$. Para y e z é análogo.