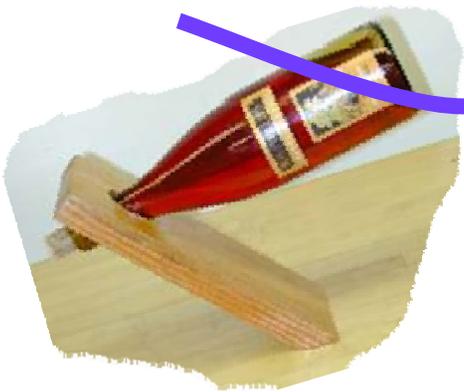


**Disciplina: Mecânica dos Sólidos 1**  
**Código: ECIV018**  
**Professor: Eduardo Nobre Lages**

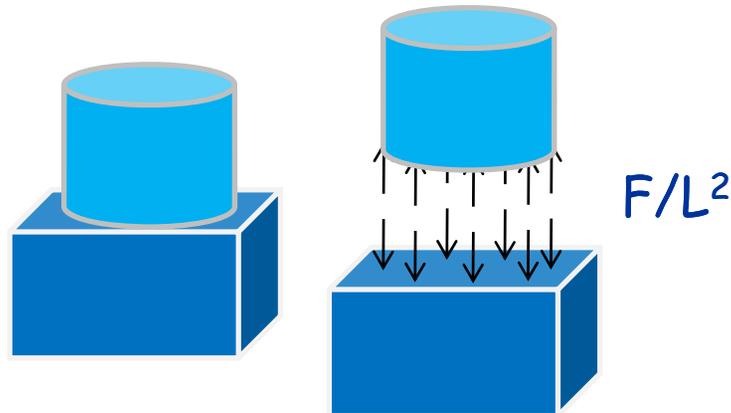
## **Forças Distribuídas: Centro de Gravidade, Centro de Massa e Centróide**



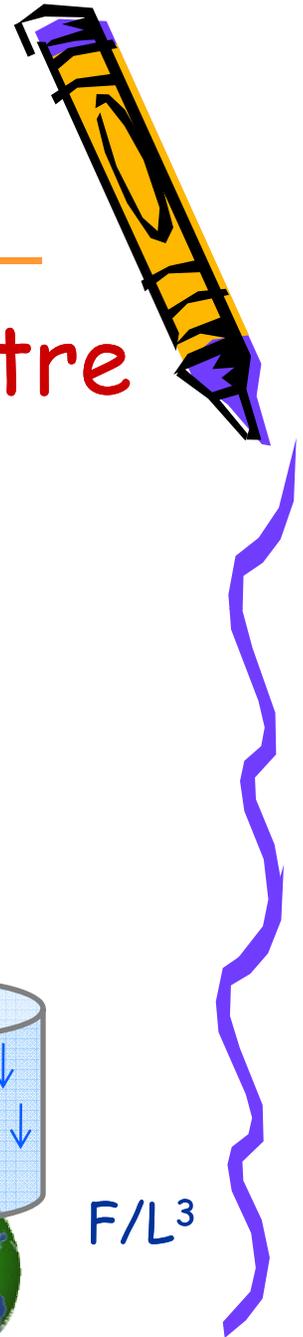
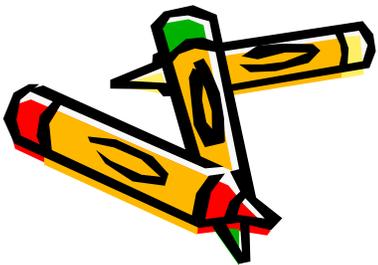
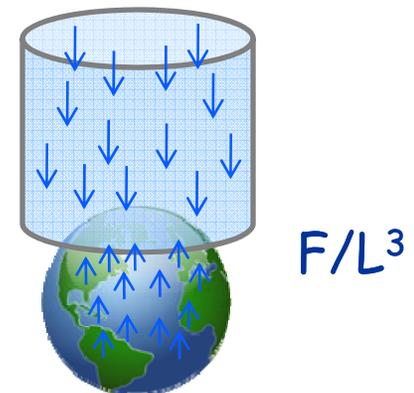
# Generalidades

Quais as formas de interação entre os corpos?

● Contato direto



● Gravitacional, centrífuga ou eletromagnética



# Generalidades

---

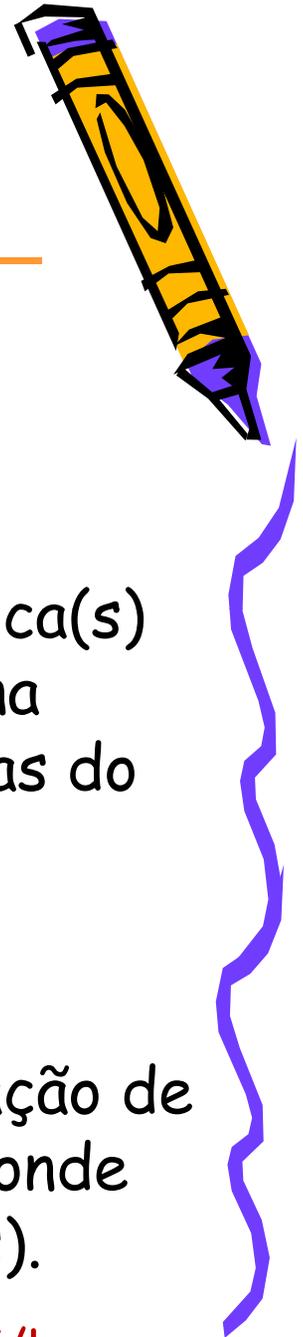
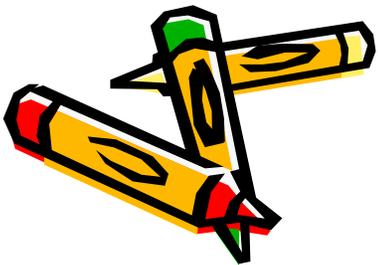
## Mudança dos domínios de transmissão de forças

- Possível: quando dimensão(ões) característica(s) da região de transmissão de força é pequena comparada com as dimensões características do elemento estrutural.

Ex:  $F/L^2 \rightarrow F/L$  e  $F/L^2 \rightarrow F$

- Necessária: forçada pela consideração de um modelo do elemento estrutural onde dimensão(ões) é(são) simplificada(s).

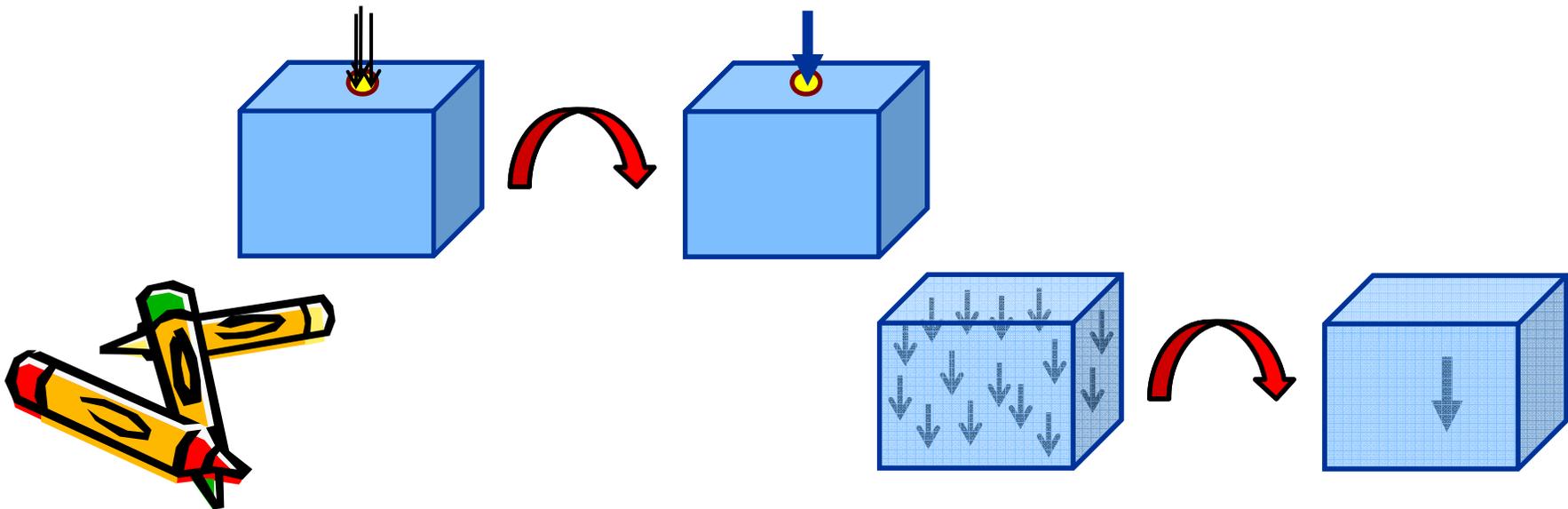
Ex:  $F/L^3 \rightarrow F/L^2$ ;  $F/L^3 \rightarrow F/L$  e  $F/L^2 \rightarrow F/L$



# Generalidades

## Cargas pontuais existem?

Cargas pontuais são abstrações de cargas distribuídas em domínios com dimensões características pequenas comparadas com as do elemento estrutural ao qual estão aplicadas ou de representação de um sistema resultante equivalente de forças distribuídas.

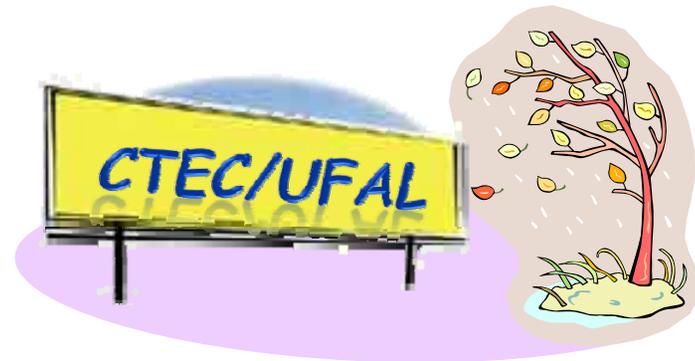


# Objetivo

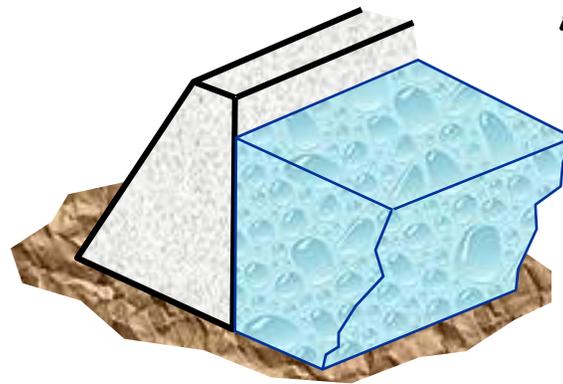
Consideração de ações distribuídas nos problemas de equilíbrio.



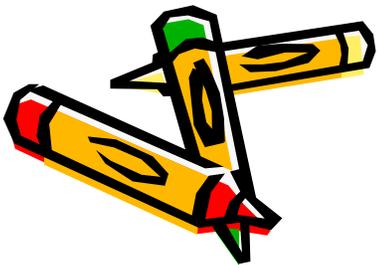
Ação gravitacional



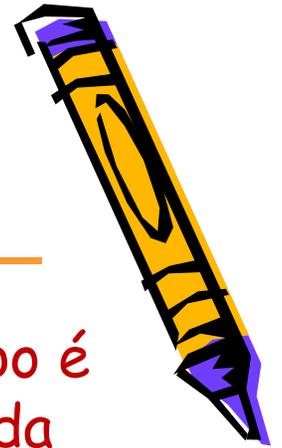
Ação do vento



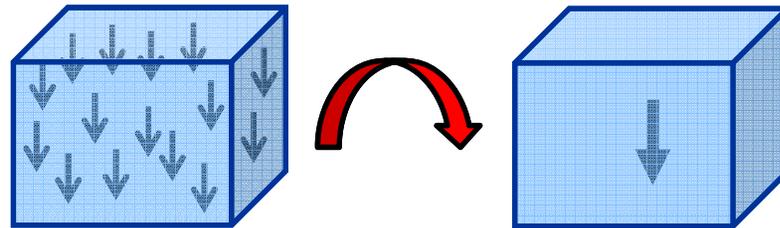
Ação hidrostática



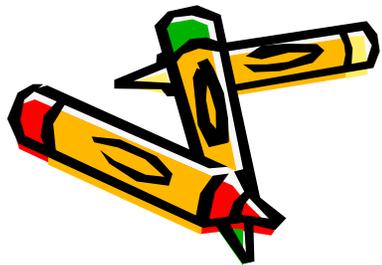
# Centro de Gravidade ou Baricentro



- O centro de gravidade ou baricentro de um corpo é a posição onde pode ser considerada a aplicação da força de gravidade resultante equivalente de todo o corpo.



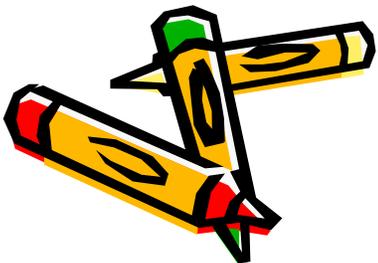
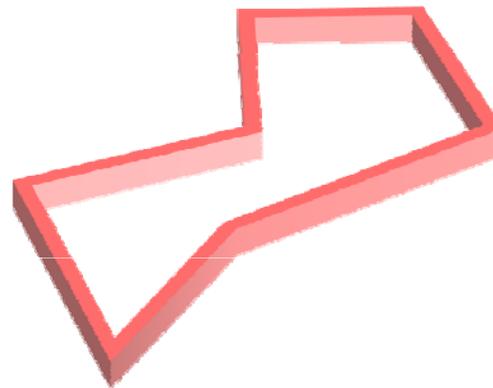
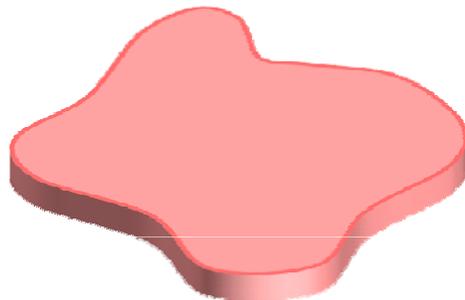
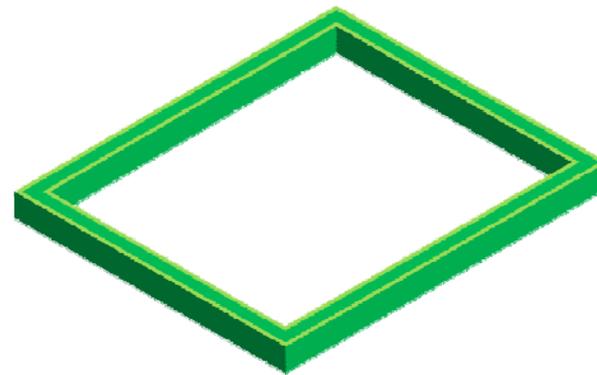
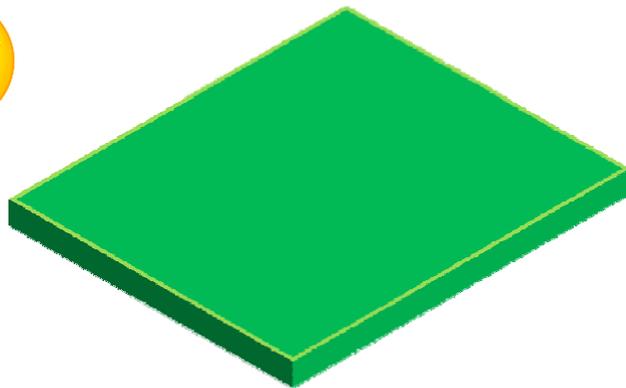
- De uma forma geral, quando se considera a não uniformidade de campos gravitacionais, a determinação da força de gravidade total e do seu ponto de aplicação ficam dependentes da posição e orientação do corpo.



Portanto, o **centro de gravidade** ou **baricentro** não pode ser considerada uma característica específica de um corpo rígido.

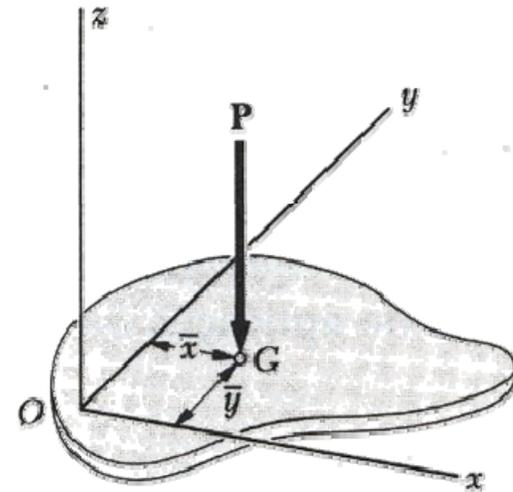
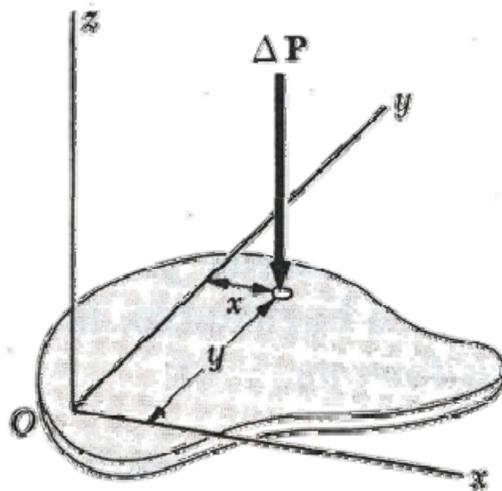
# Centro de Gravidade ou Baricentro

---



# Centro de Gravidade ou Baricentro

## ● Placas planas



### Equivalência

Força resultante

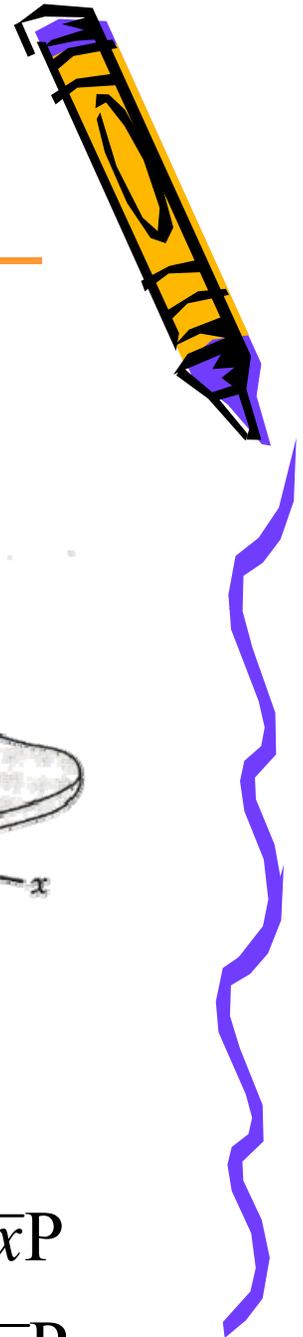
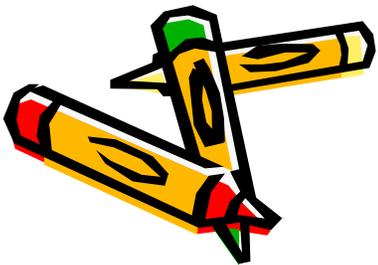
$$\sum \Delta P = P$$

Momento em torno do eixo  $y$

$$\sum x \Delta P = \bar{x} P$$

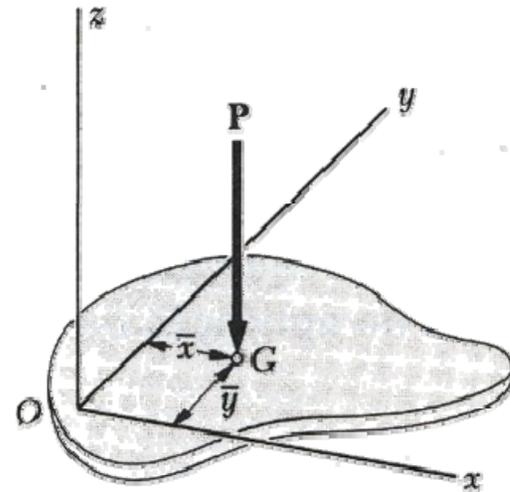
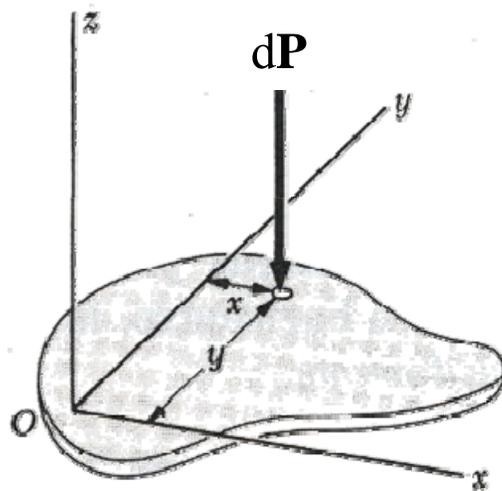
Momento em torno do eixo  $x$

$$\sum y \Delta P = \bar{y} P$$



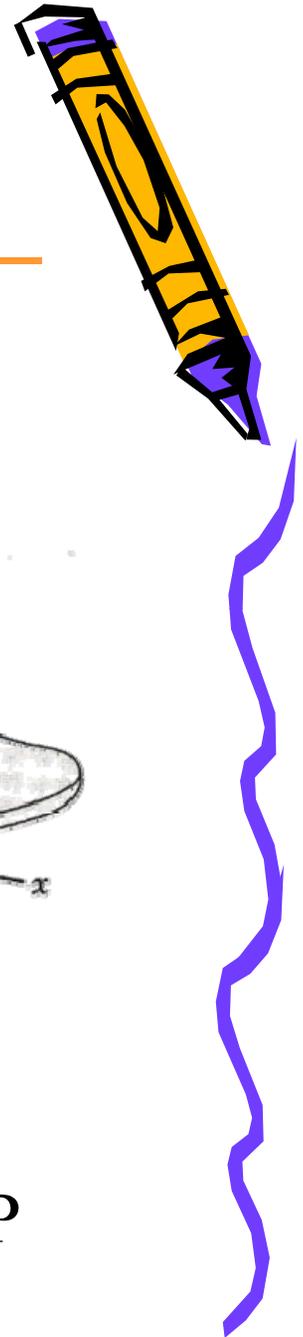
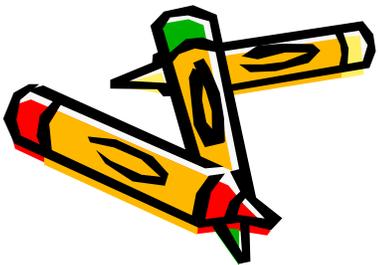
# Centro de Gravidade ou Baricentro

## ● Placas planas



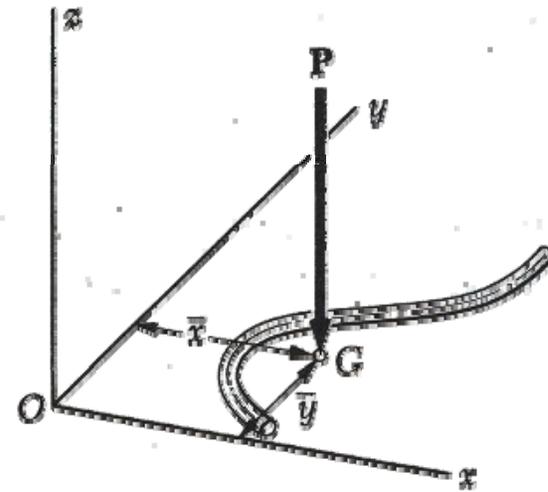
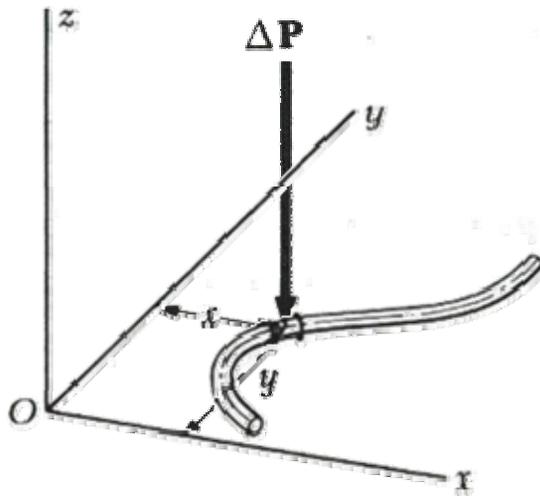
Equivalência

$$P = \int dP \quad \bar{x}P = \int x dP \quad \bar{y}P = \int y dP$$



# Centro de Gravidade ou Baricentro

## Arames planos



### Equivalência

Força resultante

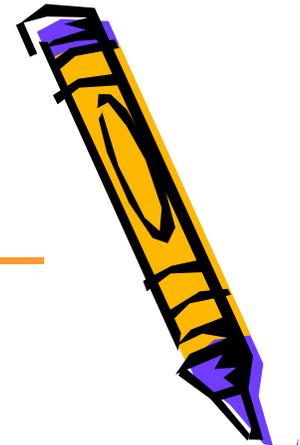
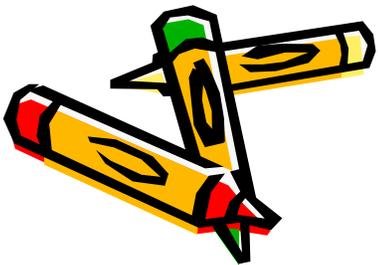
$$\sum \Delta P = P$$

Momento em torno do eixo y

$$\sum x \Delta P = \bar{x} P$$

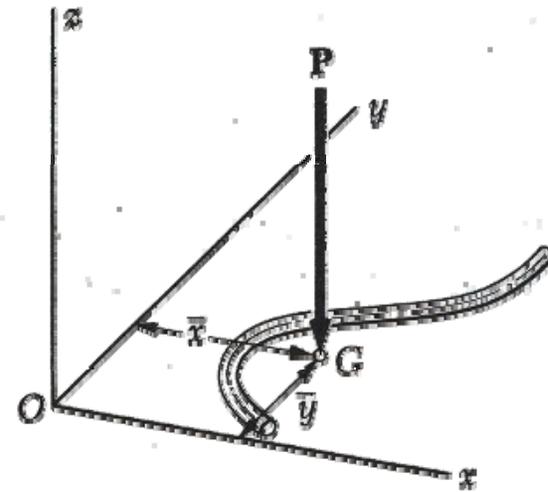
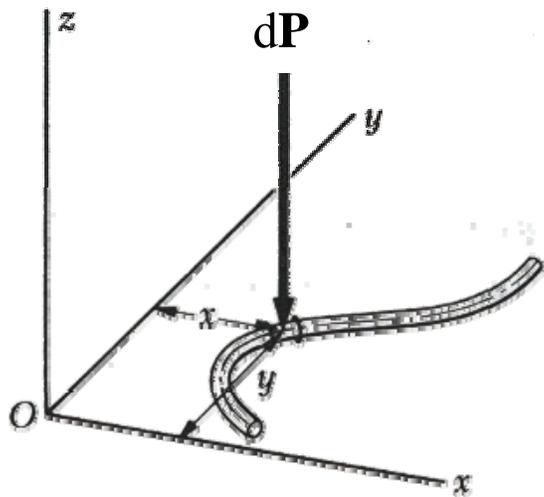
Momento em torno do eixo x

$$\sum y \Delta P = \bar{y} P$$



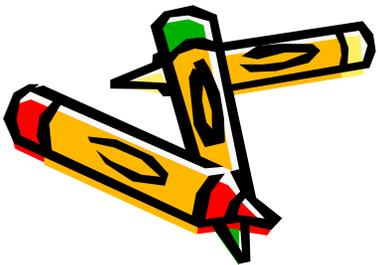
# Centro de Gravidade ou Baricentro

## Arames planos



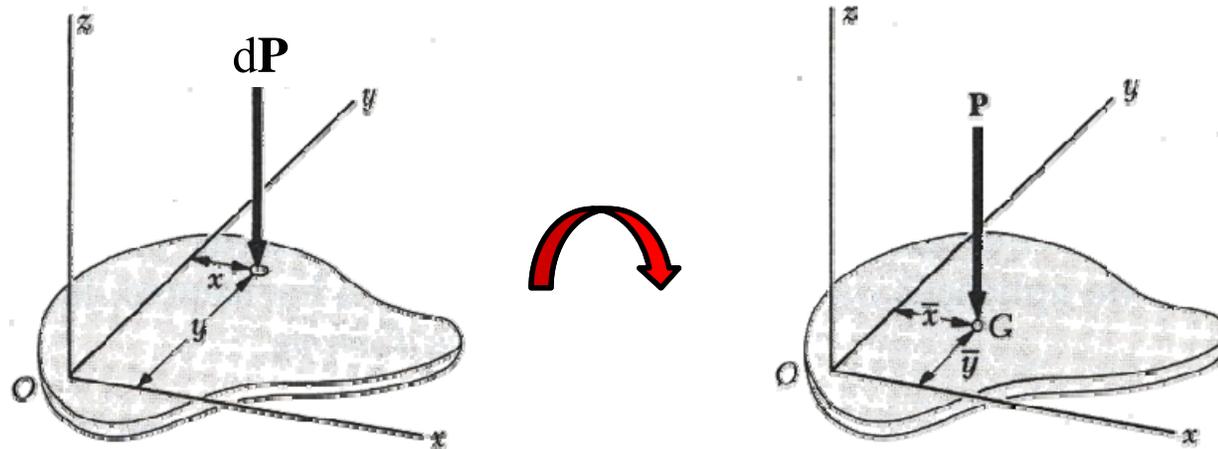
Equivalência

$$P = \int dP \quad \bar{x}P = \int x dP \quad \bar{y}P = \int y dP$$



# Centro de Massa

## ● Placas planas

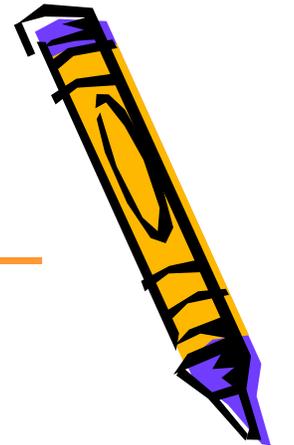
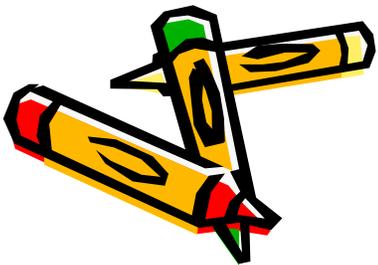


Equivalência  $P = \int dP$   $\bar{x}P = \int x dP$   $\bar{y}P = \int y dP$

Considere a placa imersa em um campo gravitacional constante. Com isso,

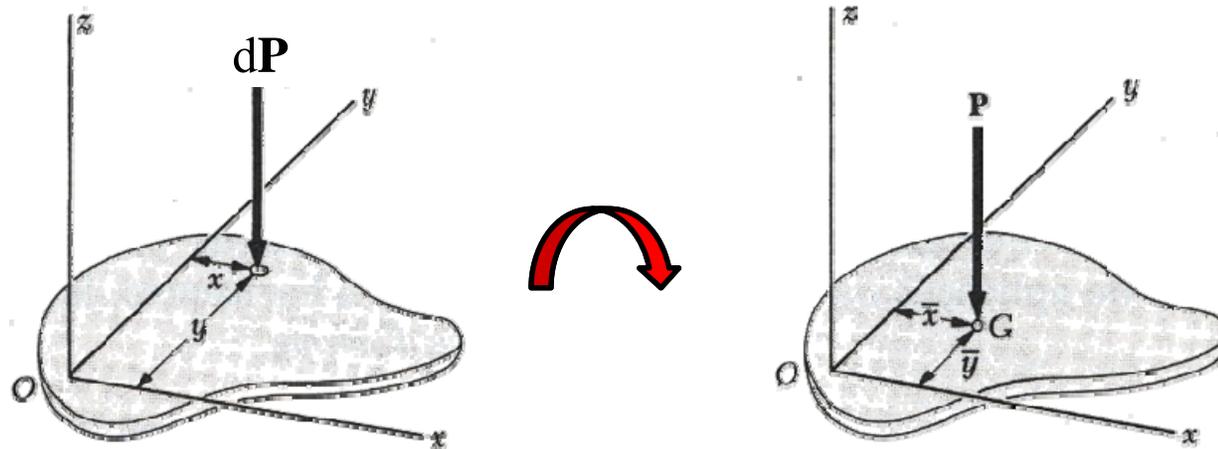
$$M = \int dm \quad \bar{x}M = \int x dm \quad \bar{y}M = \int y dm$$

onde neste caso fica definido o centro de massa. Vale o mesmo resultado para os arames planos.



# Centróide ou Centro Geométrico

## ● Placas planas

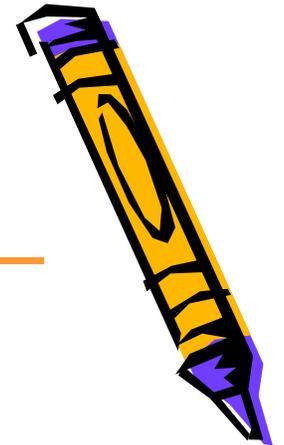
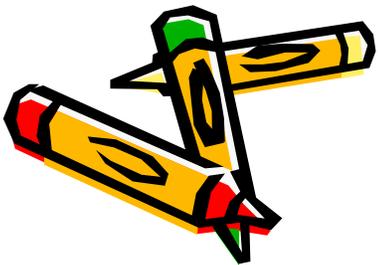


Equivalência  $P = \int dP$   $\bar{x}P = \int xdP$   $\bar{y}P = \int ydP$

Considere a placa apresentando peso específico e espessura constantes. Com isso,

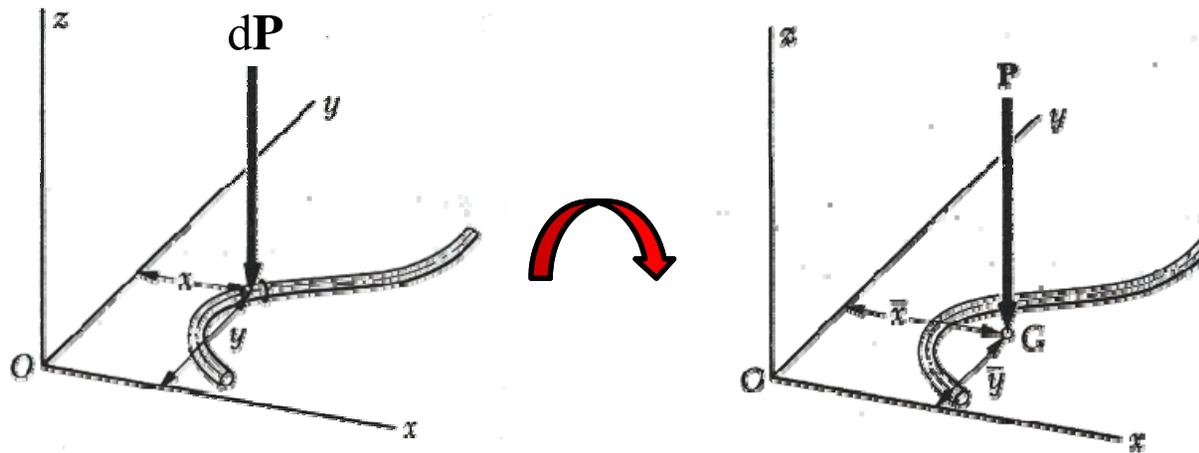
$$A = \int dA \quad \bar{x}A = \int xdA \quad \bar{y}A = \int ydA$$

onde neste caso fica definido o centróide da placa.



# Centróide ou Centro Geométrico

## ● Arames planos

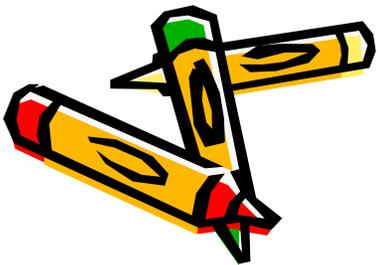


Equivalência  $P = \int dP$   $\bar{x}P = \int xdP$   $\bar{y}P = \int ydP$

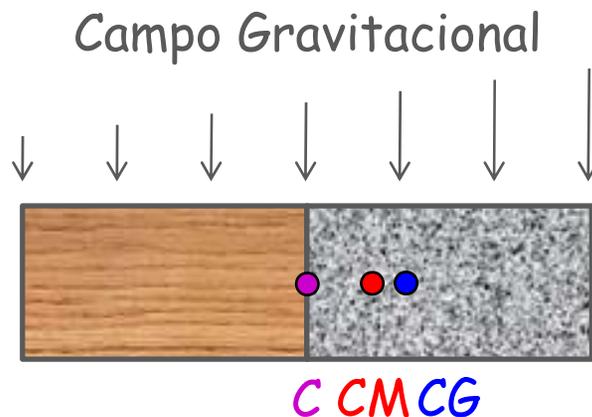
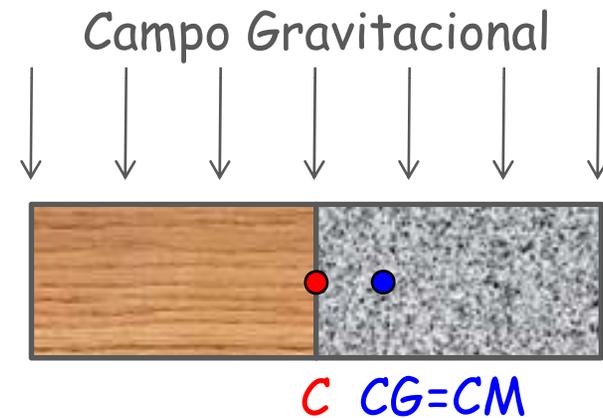
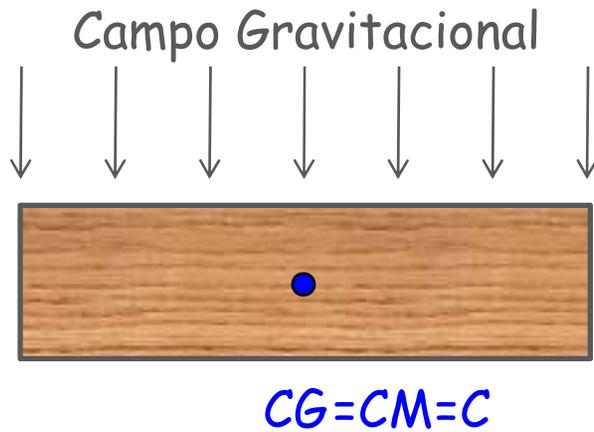
Considere o arame apresentando peso específico e seção transversal constantes. Com isso,

$$L = \int dL \quad \bar{x}L = \int xdL \quad \bar{y}L = \int ydL$$

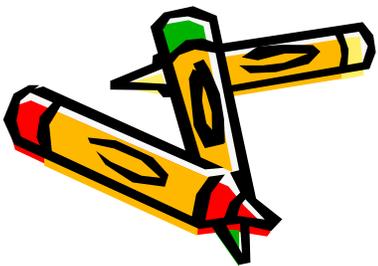
onde neste caso fica definido o centróide do arame.



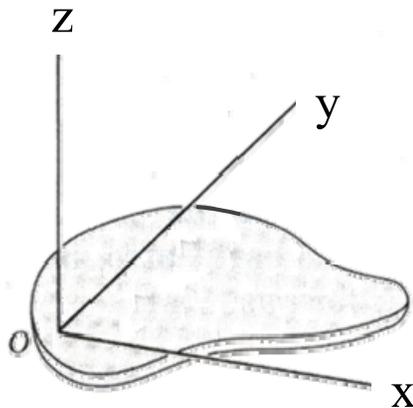
# Centro de Gravidade, Centro de Massa e Centróide



-  **Madeira**
-  **Granito**



# Momentos de Primeira Ordem de Superfícies e Curvas



Momento de 1ª ordem da superfície em relação ao eixo x

$$Q_x = \int y dA = \bar{y}A$$

Momento de 1ª ordem da superfície em relação ao eixo y

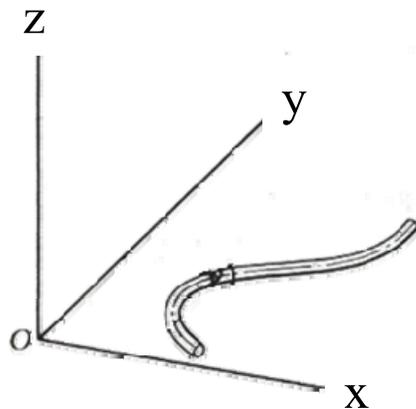
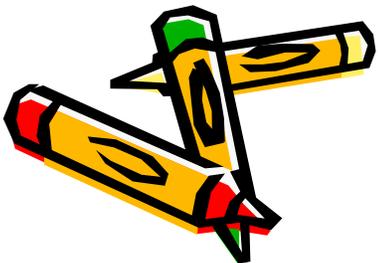
$$Q_y = \int x dA = \bar{x}A$$

Momento de 1ª ordem da curva em relação ao eixo x

$$Q_x = \int y dL = \bar{y}L$$

Momento de 1ª ordem da curva em relação ao eixo y

$$Q_y = \int x dL = \bar{x}L$$



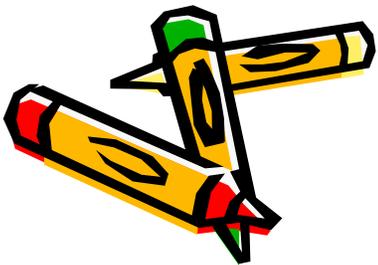
# Momentos de Primeira Ordem de Superfícies e Curvas

---



$$Q_x = \bar{y}A \quad (\text{ou } \bar{y}L) \qquad Q_y = \bar{x}A \quad (\text{ou } \bar{x}L)$$

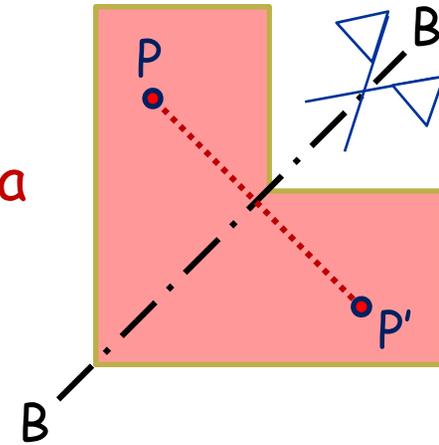
- As coordenadas do centróide de uma superfície ou curva podem ser obtidas dividindo-se os momentos de primeira ordem pela área da superfície ou comprimento da curva, respectivamente.
- Se o centróide de uma superfície ou curva estiver localizado sobre um eixo de coordenadas, o momento de primeira ordem em relação a esse eixo será nulo e vice-versa.



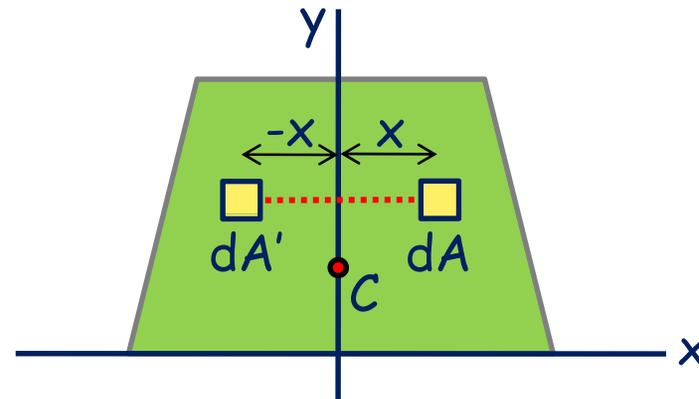
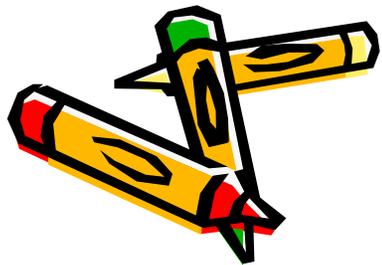
# Momentos de Primeira Ordem de Superfícies e Curvas



- Região simétrica e eixo de simetria

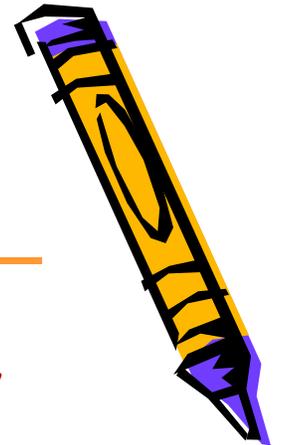
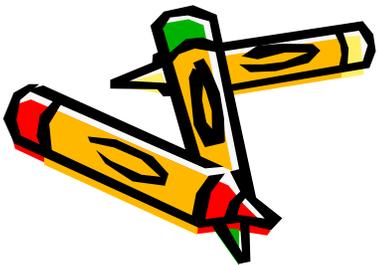
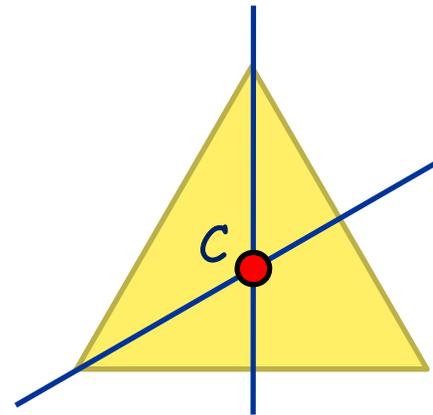
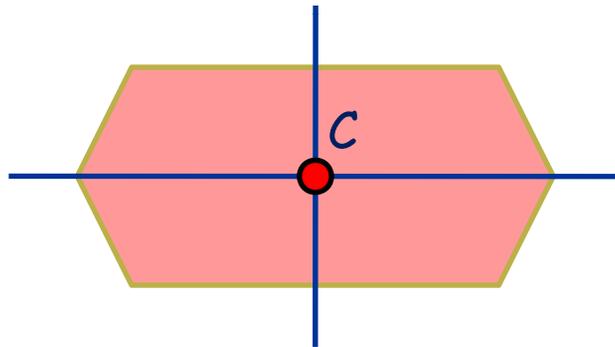


- Se uma superfície ou curva apresenta um eixo de simetria, o centróide dessa região está contido sobre esse eixo de simetria.



# Momentos de Primeira Ordem de Superfícies e Curvas

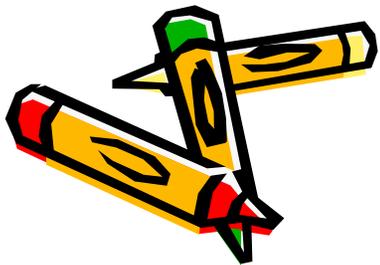
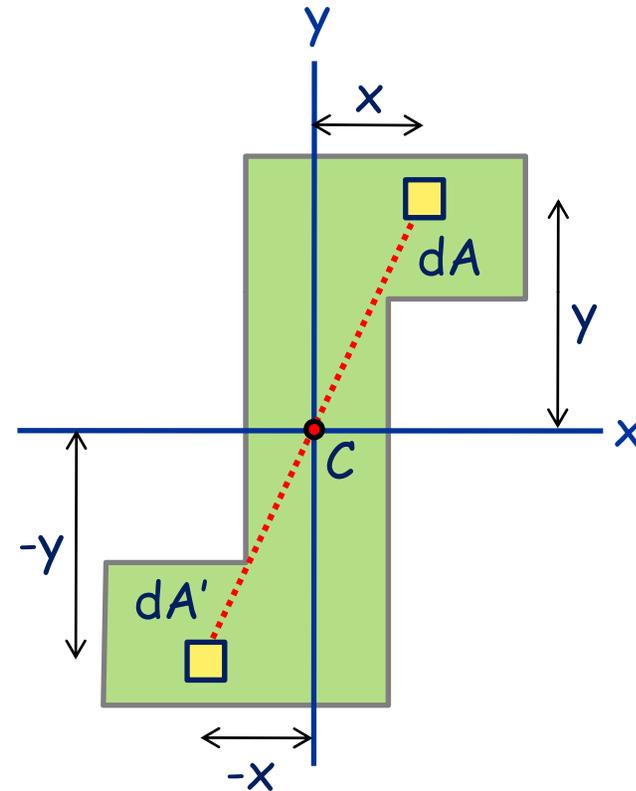
- Uma região que apresenta dois eixos de simetria, o centróide da mesma encontra-se na interseção desses eixos.



# Momentos de Primeira Ordem de Superfícies e Curvas

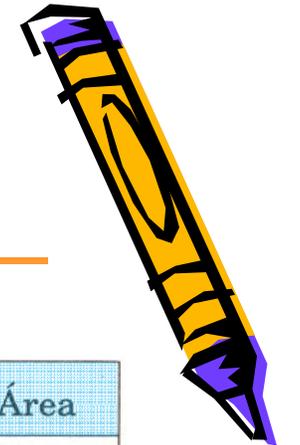


- Região com centro de simetria



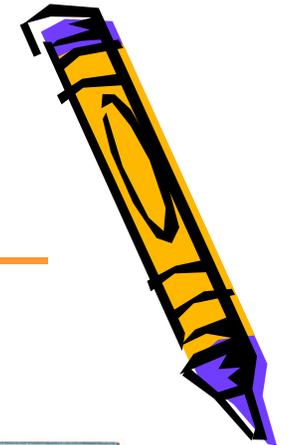
● Se uma superfície ou curva apresenta um centro de simetria, esse corresponde ao centróide da região.

# Centróides de Superfícies Planas de Formatos Usuais



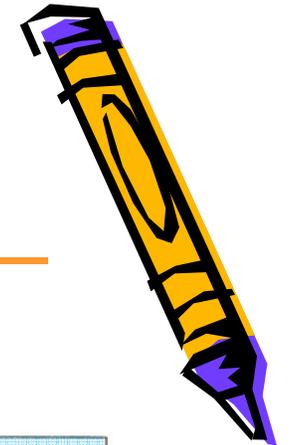
Forma de Superfície		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Área
Triângulo			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Quarto de círculo		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Semicírculo		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Limitada por dois segmentos de reta perpendiculares e um quarto de elipse		$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
Limitada por um segmento de reta e uma semi-elipse		0	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$

# Centróides de Superfícies Planas de Formatos Usuais



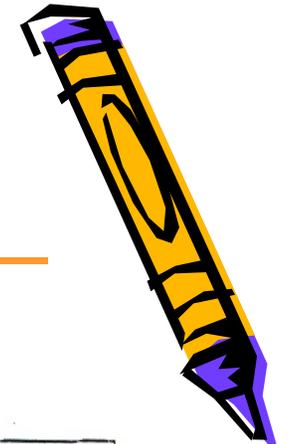
Forma de Superfície		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Área
Limitada por dois segmentos de reta perpendiculares e uma semiparábola		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Limitada por um segmento de reta e uma parábola		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
Limitada por dois segmentos de reta perpendiculares e um arco de parábola do 2º grau.		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$

# Centróides de Superfícies Planas de Formatos Usuais



Forma de Superfície		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Área
Limitada por dois segmentos de reta perpendiculares e um arco de parábola do grau $n$ .		$\frac{n+1}{n+2} a$	$\frac{n+1}{4n+2} h$	$\frac{ah}{n+1}$
Setor circular		$\frac{2r \text{ sen } \alpha}{3\alpha}$	0	$\alpha r^2$

# Centróides de Curvas Planas de Formatos Usuais

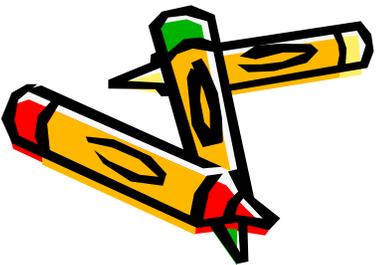


Forma da curva		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Comprimento
Quarto de circunferência		$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r}{2}$
Semicircunferência		0	$\frac{2r}{\pi}$	$\pi r$
Arco de circunferência		$\frac{r \operatorname{sen} \alpha}{\alpha}$	0	$2\alpha r$

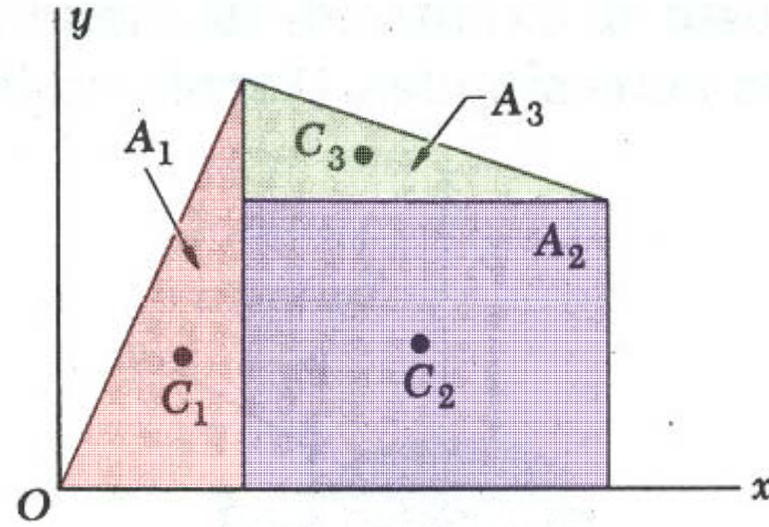
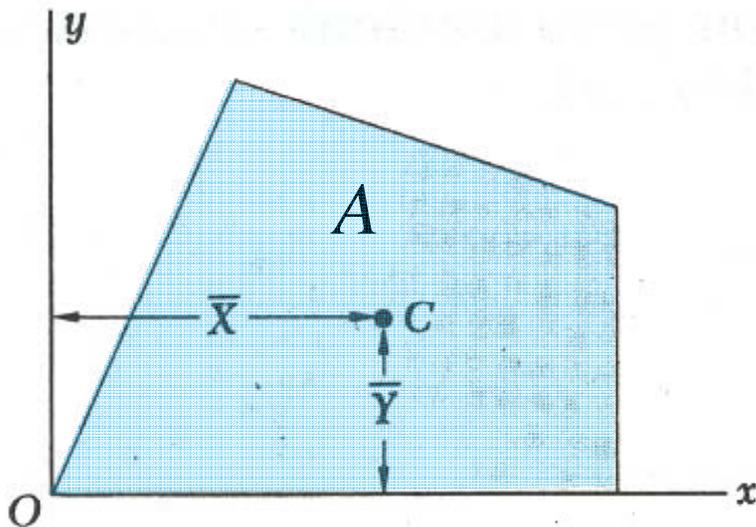
# Placas e Fios Compostos

---

- Quando se estiver interessado na determinação de propriedades integrais (área, comprimento e momentos de primeira ordem) de regiões que não estão tabeladas, mas identifica-se que a região em questão é formada pela composição de regiões elementares cujas propriedades integrais são conhecidas, aplica-se essa composição na avaliação das integrais referentes às propriedades de interesse.



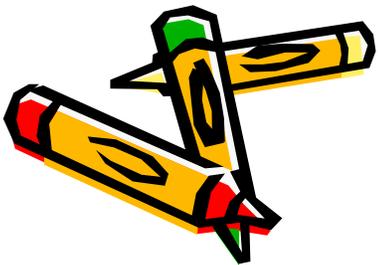
# Placas e Fios Compostos



$$A = \int_{R_1+R_2+R_3} dA = \int_{R_1} dA + \int_{R_2} dA + \int_{R_3} dA = A_{R_1} + A_{R_2} + A_{R_3}$$

$$Q_x = \int_{R_1+R_2+R_3} y dA = \dots = Q_{xR_1} + Q_{xR_2} + Q_{xR_3} \Rightarrow \bar{Y} = \frac{Q_x}{A}$$

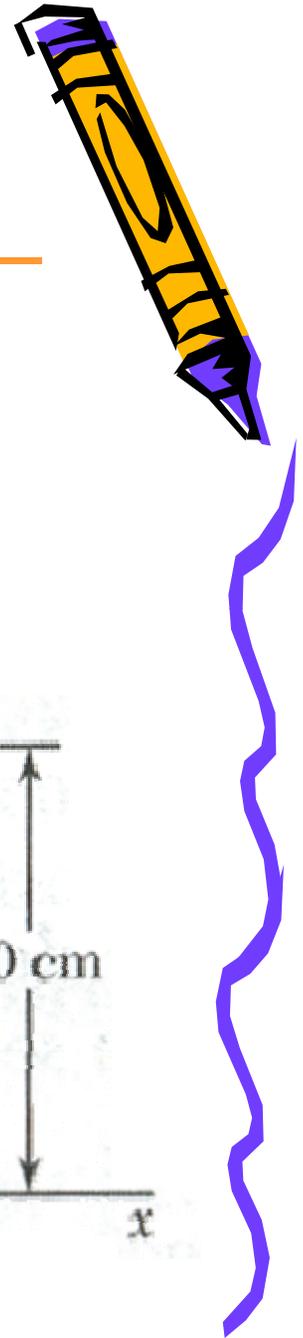
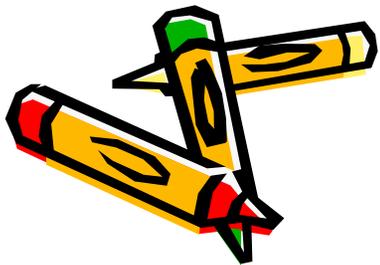
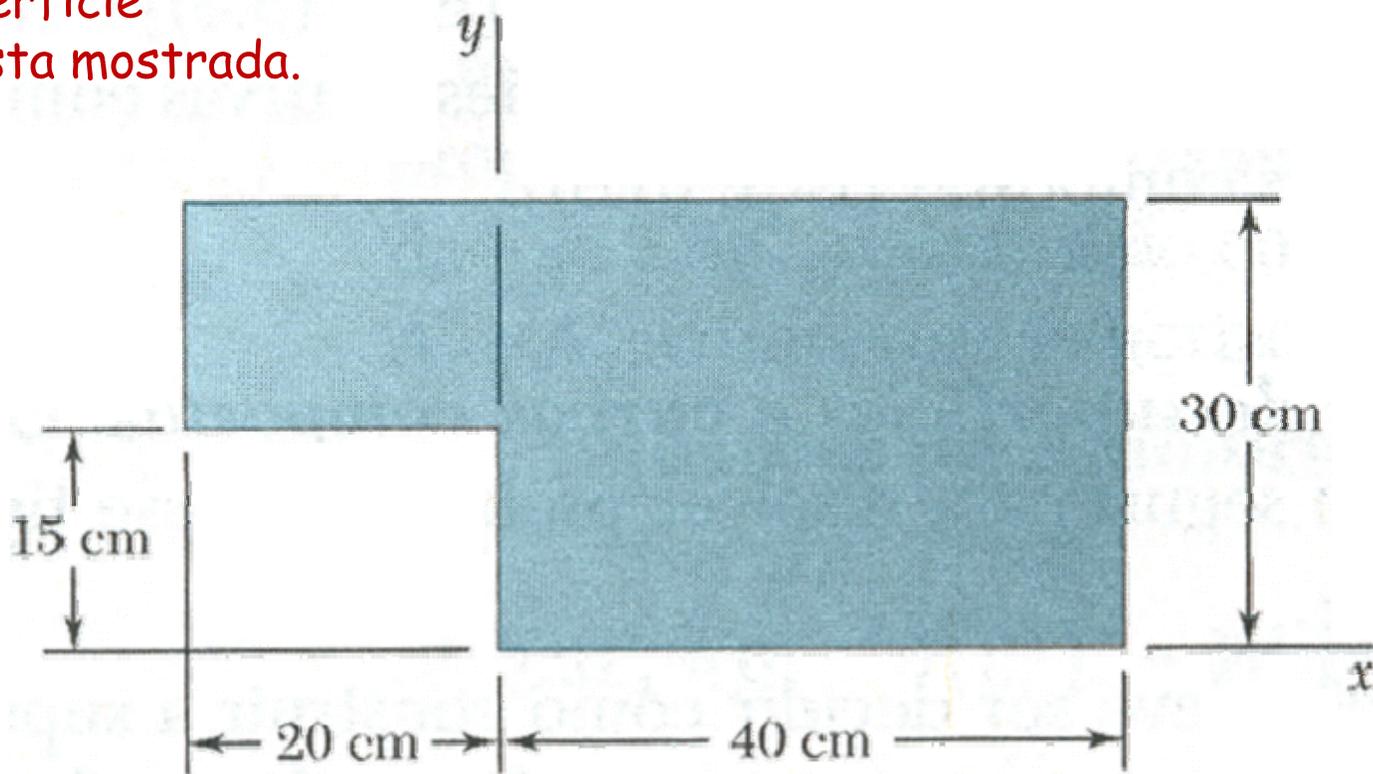
$$Q_y = \int_{R_1+R_2+R_3} x dA = \dots = Q_{yR_1} + Q_{yR_2} + Q_{yR_3} \Rightarrow \bar{X} = \frac{Q_y}{A}$$



# Placas e Fios Compostos

## Exemplo:

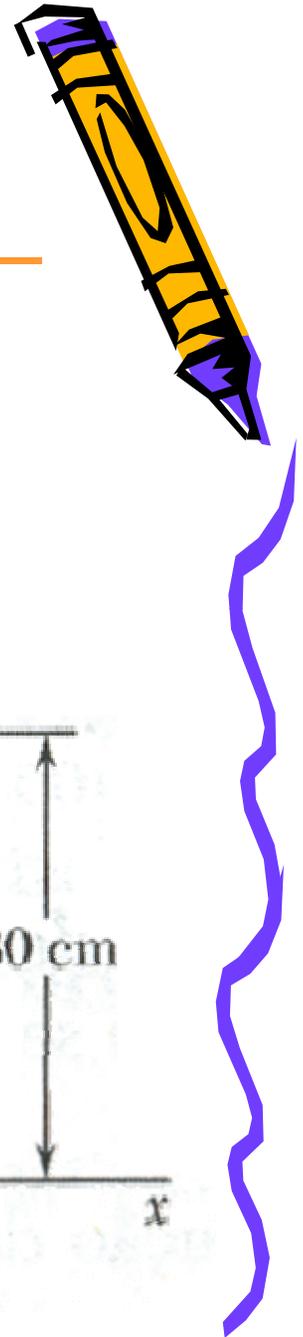
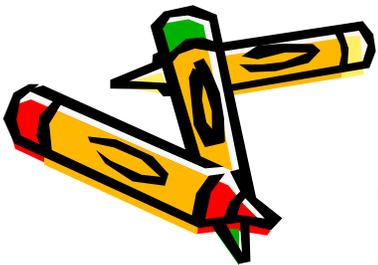
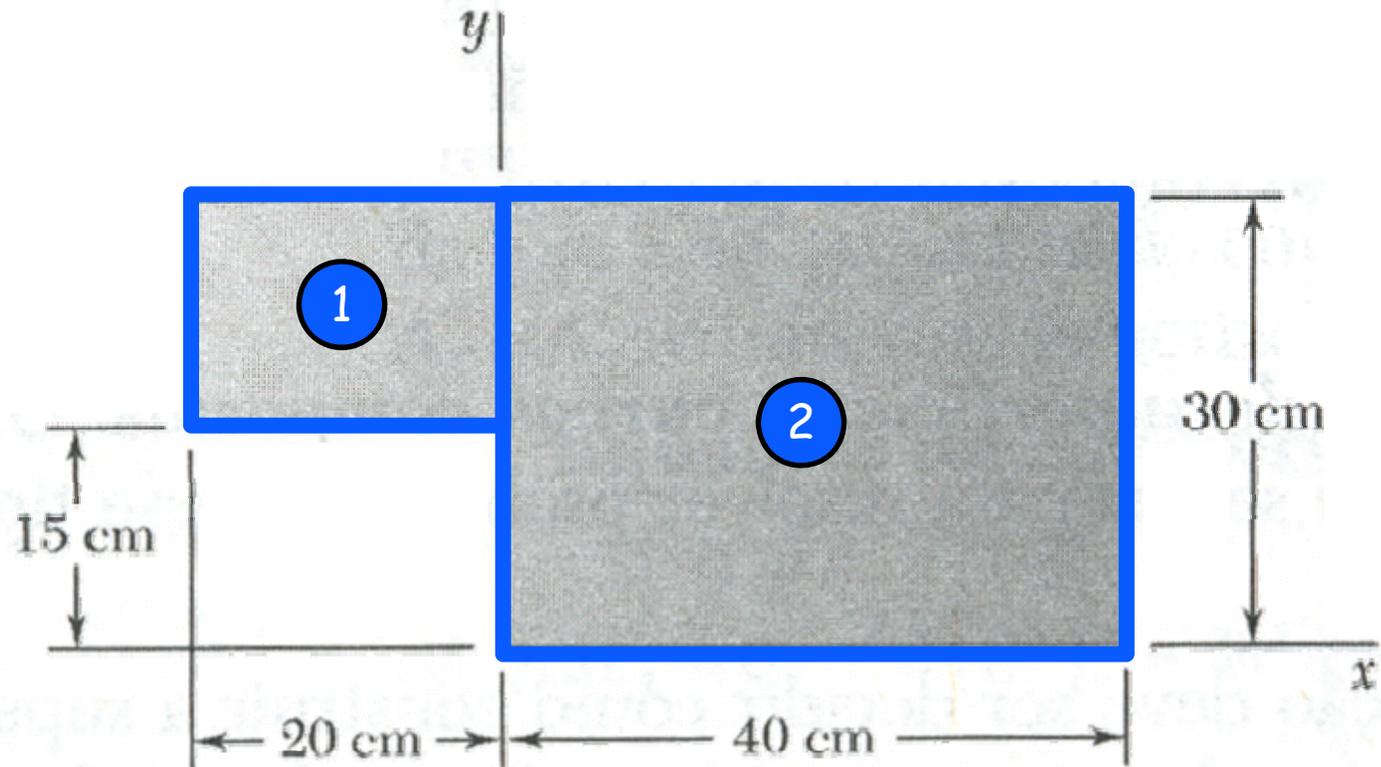
Determine o centróide da superfície composta mostrada.



# Placas e Fios Compostos

Exemplo (continuação):

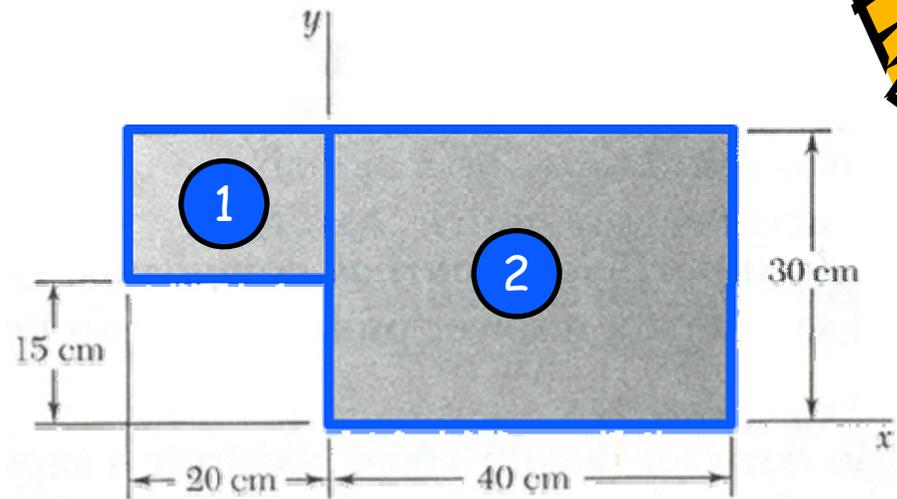
1ª composição



# Placas e Fios Compostos

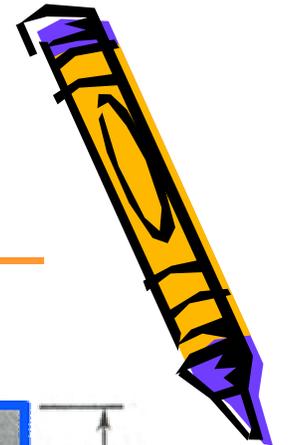
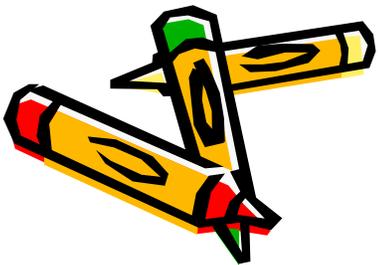
Exemplo (continuação):

1ª composição



Região	$A_i$ (cm <sup>2</sup> )	$\bar{x}_i$ (cm)	$\bar{y}_i$ (cm)	$Q_{x_i}$ (cm <sup>3</sup> )	$Q_{y_i}$ (cm <sup>3</sup> )
1	300	-10	22,5	6750	-3000
2	1200	20	15	18000	24000
<b>Total</b>	<b>1500</b>	<b>-</b>	<b>-</b>	<b>24750</b>	<b>21000</b>

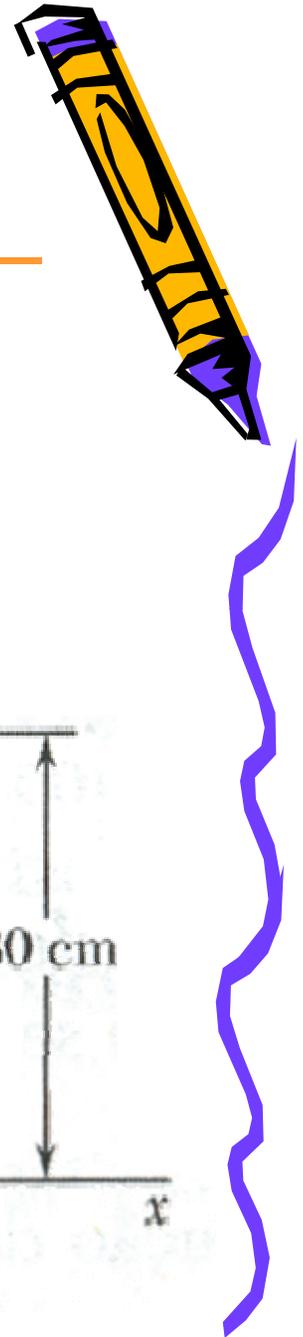
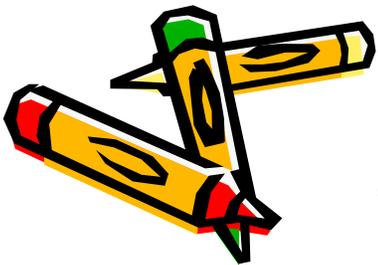
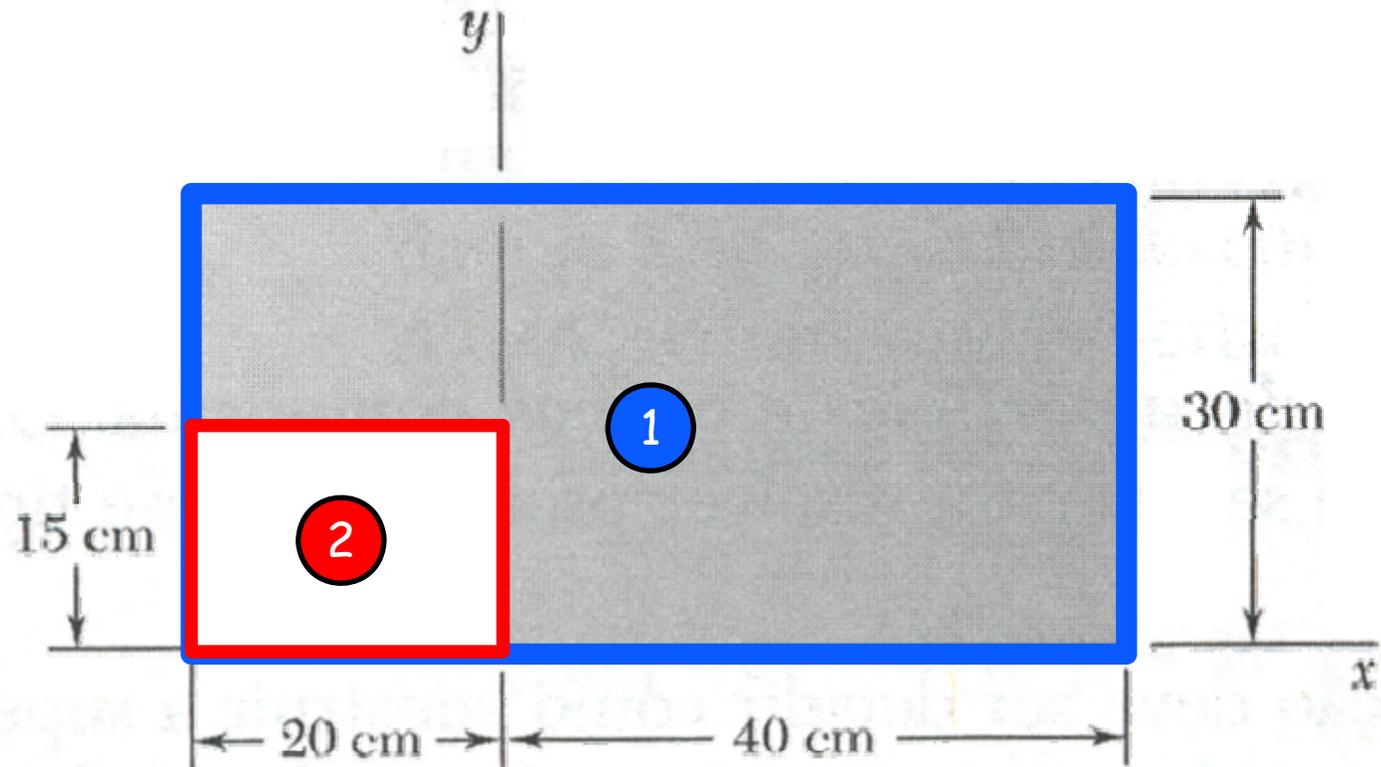
$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{21000}{1500} = 14 \text{ cm} \quad \bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{24750}{1500} = 16,5 \text{ cm}$$



# Placas e Fios Compostos

Exemplo (continuação):

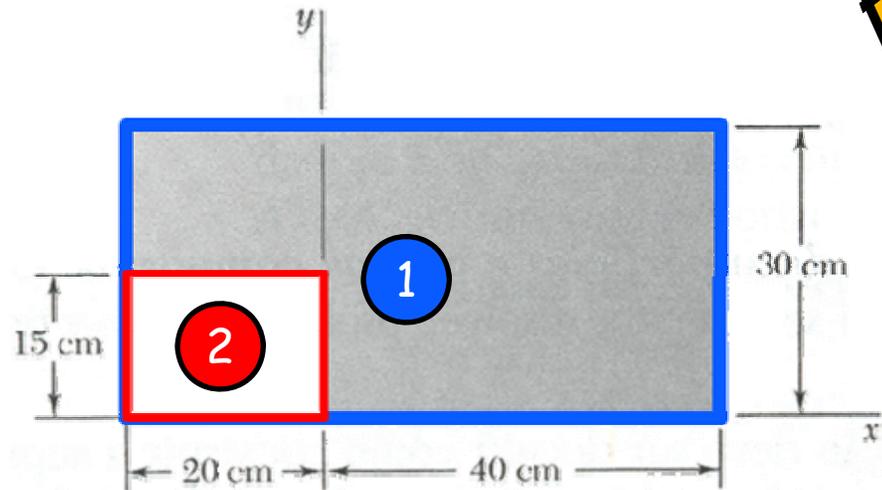
2ª composição



# Placas e Fios Compostos

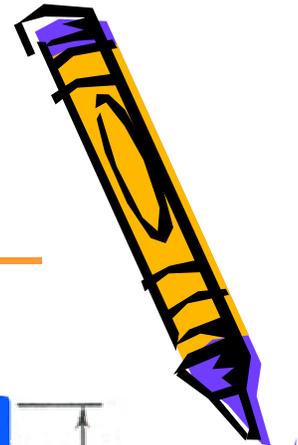
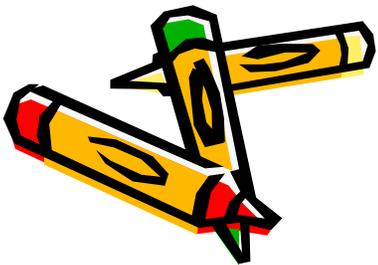
Exemplo (continuação):

2ª composição

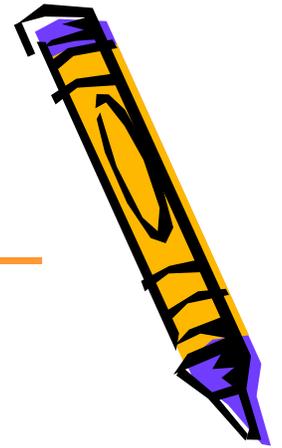


Região	$A_i$ (cm <sup>2</sup> )	$\bar{x}_i$ (cm)	$\bar{y}_i$ (cm)	$Q_{x_i}$ (cm <sup>3</sup> )	$Q_{y_i}$ (cm <sup>3</sup> )
1	1800	10	15	27000	18000
2	-300	-10	7,5	-2250	3000
<b>Total</b>	<b>1500</b>	<b>-</b>	<b>-</b>	<b>24750</b>	<b>21000</b>

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{21000}{1500} = 14 \text{ cm} \quad \bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{24750}{1500} = 16,5 \text{ cm}$$



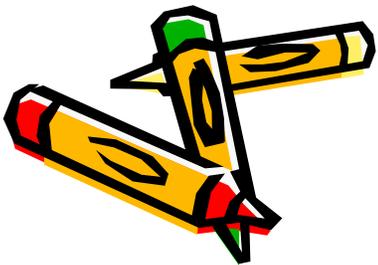
# Determinação de Centróide por Integração



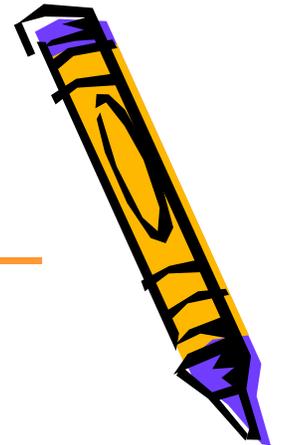
$$Q_x = \bar{y}A = \int ydA \quad Q_y = \bar{x}A = \int xdA$$

- Em princípio, para quantificação dos momentos de 1ª ordem de superfície (ou momentos estáticos de área), esses são calculados a partir de integrais duplas no domínio representativo da região estudada, onde se deve escrever o elemento infinitesimal de área  $dA$  de acordo com a conveniência

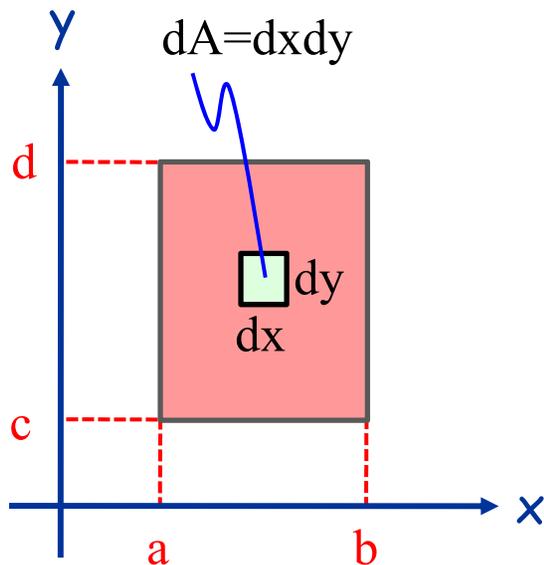
das coordenadas de descrição da região tratada.



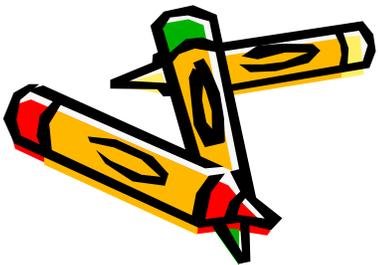
# Determinação de Centróide por Integração Dupla



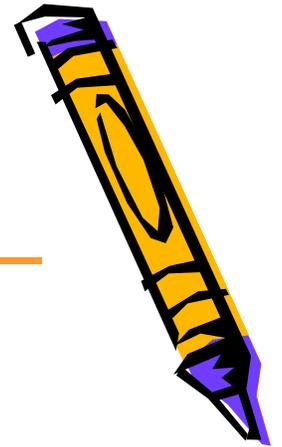
$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b \text{ e } c \leq y \leq d\}$$



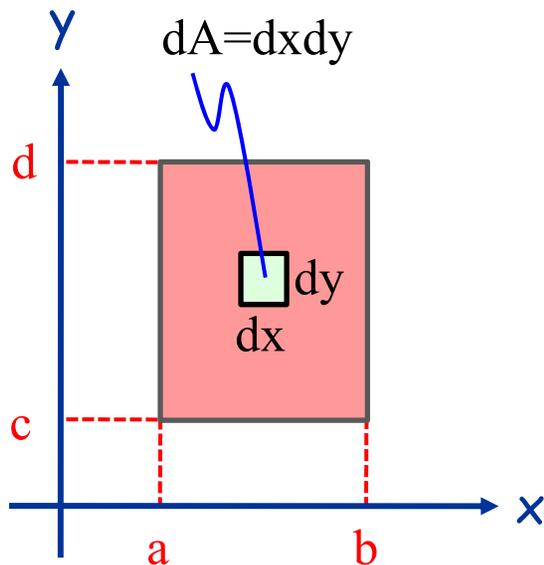
$$\begin{aligned} Q_x &= \int y dA = \int_c^d \int_a^b y dx dy \\ &= \int_c^d [xy]_a^b dy = \int_c^d (b-a)y dy \\ &= \left[ (b-a) \frac{y^2}{2} \right]_c^d \\ &= \frac{(b-a)(d^2 - c^2)}{2} \end{aligned}$$



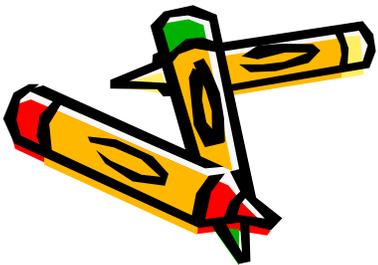
# Determinação de Centróide por Integração Dupla



$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b \text{ e } c \leq y \leq d\}$$



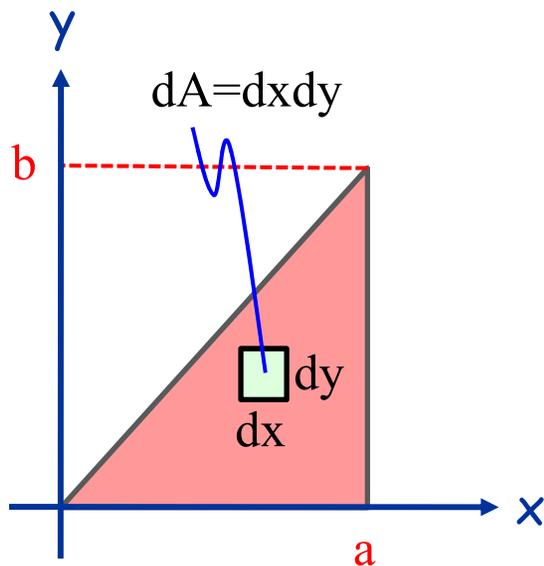
$$\begin{aligned} Q_y &= \int x dA = \int_c^d \int_a^b x dx dy \\ &= \int_c^d \left[ \frac{x^2}{2} \right]_a^b dy = \int_c^d \frac{b^2 - a^2}{2} dy \\ &= \left[ \frac{b^2 - a^2}{2} y \right]_c^d \\ &= \frac{(b^2 - a^2)(d - c)}{2} \end{aligned}$$



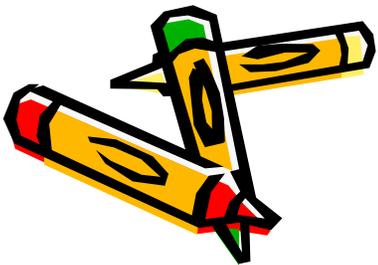
# Determinação de Centróide por Integração Dupla



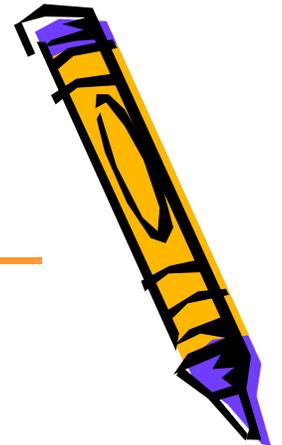
$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq a \text{ e } 0 \leq y \leq \frac{b}{a}x \right\}$$



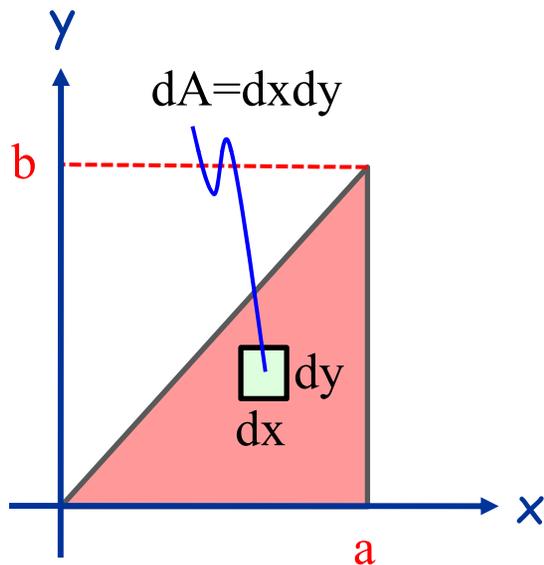
$$\begin{aligned} Q_x &= \int y dA = \int_0^a \int_0^{\frac{b}{a}x} y dy dx \\ &= \int_0^a \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^{\frac{b}{a}x} dx = \int_0^a \frac{b^2}{2a^2} x^2 dx \\ &= \left[ \frac{b^2}{2a^2} \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{ab^2}{6} \end{aligned}$$



# Determinação de Centróide por Integração Dupla



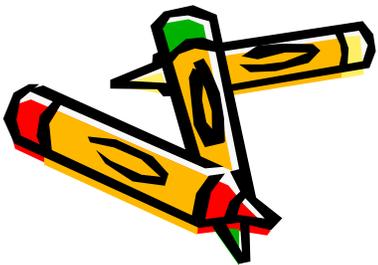
$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq a \text{ e } 0 \leq y \leq \frac{b}{a}x \right\}$$



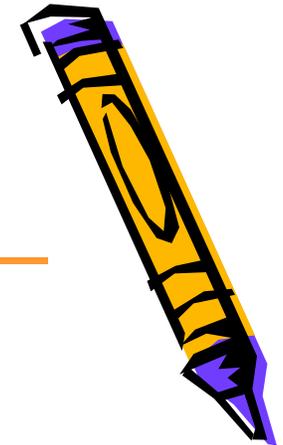
$$Q_y = \int x dA = \int_0^a \int_0^{\frac{b}{a}x} x dy dx$$

$$= \int_0^a [xy]_0^{\frac{b}{a}x} dx = \int_0^a \frac{b}{a} x^2 dx$$

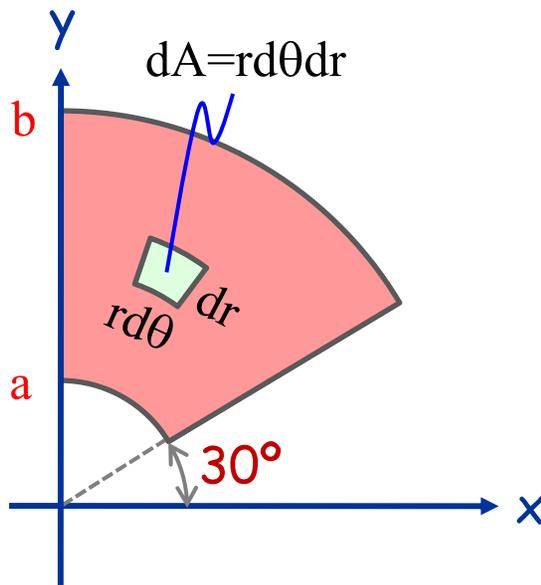
$$= \left[ \frac{b}{a} \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{a^2 b}{3}$$



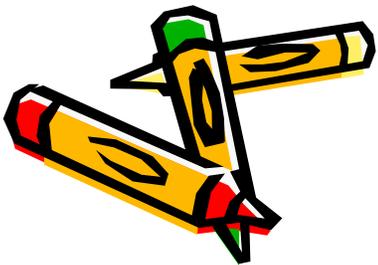
# Determinação de Centróide por Integração Dupla



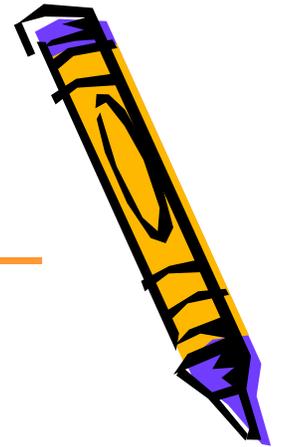
$$D = \left\{ (r \cos \theta, r \sin \theta) \mid a \leq r \leq b \text{ e } \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$



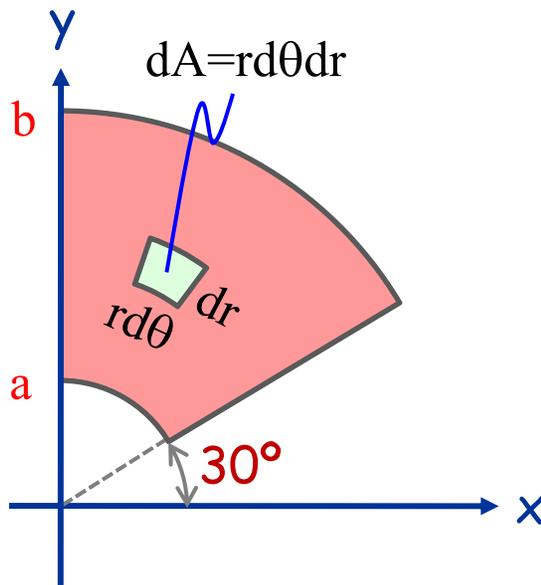
$$\begin{aligned} Q_x &= \int y dA = \int_a^b \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin \theta d\theta dr \\ &= \int_a^b \left[ -r^2 \cos \theta \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} dr = \int_a^b \frac{\sqrt{3}}{2} r^2 dr \\ &= \left[ \frac{\sqrt{3}}{6} r^3 \right]_a^b = \frac{\sqrt{3}}{6} (b^3 - a^3) \end{aligned}$$



# Determinação de Centróide por Integração Dupla



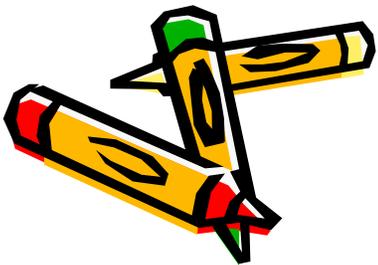
$$D = \left\{ (r \cos \theta, r \sin \theta) \mid a \leq r \leq b \text{ e } \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$



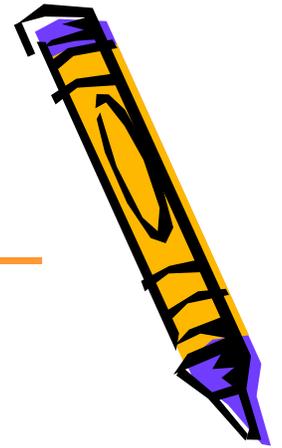
$$Q_y = \int x dA = \int_a^b \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos \theta d\theta dr$$

$$= \int_a^b \left[ r^2 \sin \theta \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} dr = \int_a^b \frac{r^2}{2} dr$$

$$= \left[ \frac{r^3}{6} \right]_a^b = \frac{b^3 - a^3}{6}$$



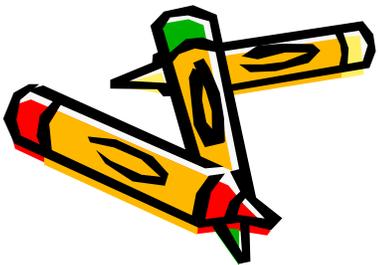
# Determinação de Centróide por Integração de Fatias



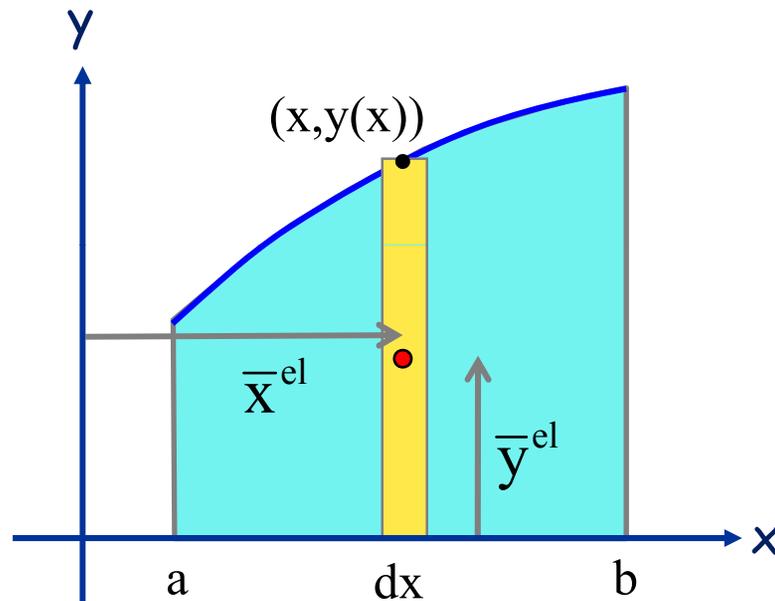
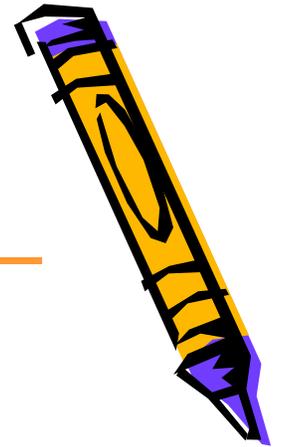
●  $Q_x = \bar{y}A = \int ydA = \int dQ_x^{el}$

$$Q_y = \bar{x}A = \int xdA = \int dQ_y^{el}$$

- A idéia desta sistemática é considerar que a região de interesse é formada pela composição de infinitas fatias infinitesimais cujas formas correspondem a regiões cujas propriedades geométricas já são conhecidas. Sendo assim, esta sistemática pode ser entendida como uma aplicação do método já apresentado para regiões compostas.



# Determinação de Centróide por Integração de Fatias



$$A = \int dA = \int dA^{\text{el}} = \int_a^b y(x) dx$$

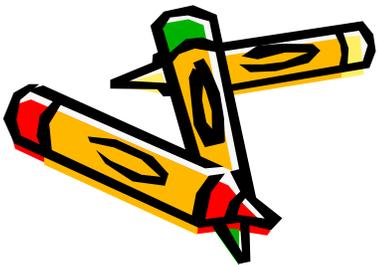
$$Q_x = \int y dA = \int dQ_x^{\text{el}} \\ = \int \bar{y}^{\text{el}} dA^{\text{el}} = \int_a^b \frac{y(x)^2}{2} dx$$

$$Q_y = \int x dA = \int dQ_y^{\text{el}} \\ = \int \bar{x}^{\text{el}} dA^{\text{el}} = \int_a^b xy(x) dx$$

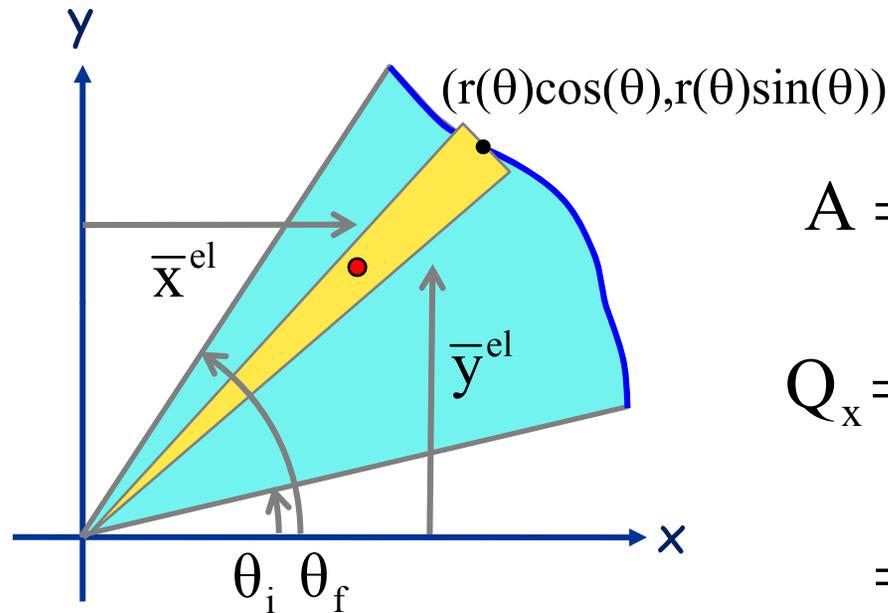
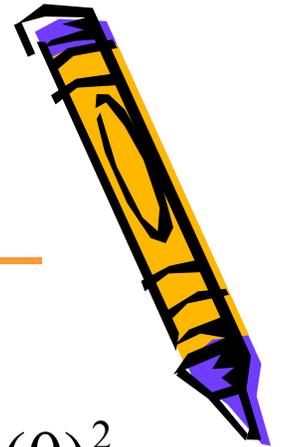
$$dA^{\text{el}} = y(x) dx$$

$$\bar{x}^{\text{el}} = x$$

$$\bar{y}^{\text{el}} = \frac{y(x)}{2}$$



# Determinação de Centróide por Integração de Fatias



$$A = \int dA = \int dA^{el} = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \frac{r(\theta)^2}{2} d\theta$$

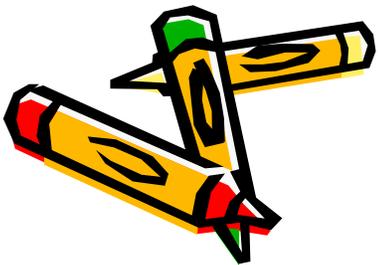
$$Q_x = \int y dA = \int dQ_x^{el} \\ = \int \bar{y}^{el} dA^{el} = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \frac{r(\theta)^3}{3} \sin \theta d\theta$$

$$Q_y = \int x dA = \int dQ_y^{el} \\ = \int \bar{x}^{el} dA^{el} = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \frac{r(\theta)^3}{3} \cos \theta d\theta$$

$$dA^{el} = \frac{r(\theta)^2}{2} d\theta$$

$$\bar{x}^{el} = \frac{2}{3} r(\theta) \cos \theta$$

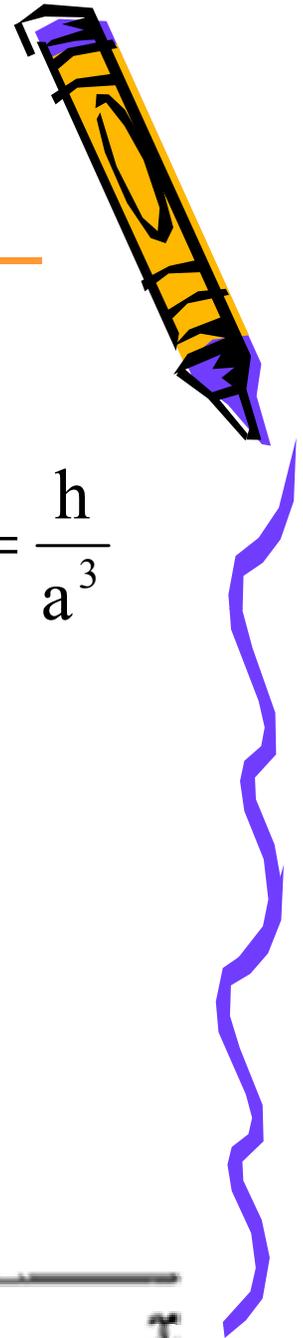
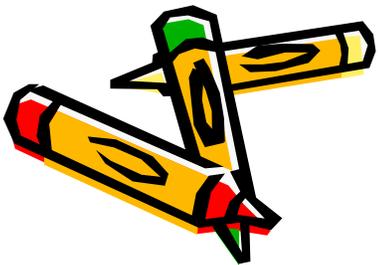
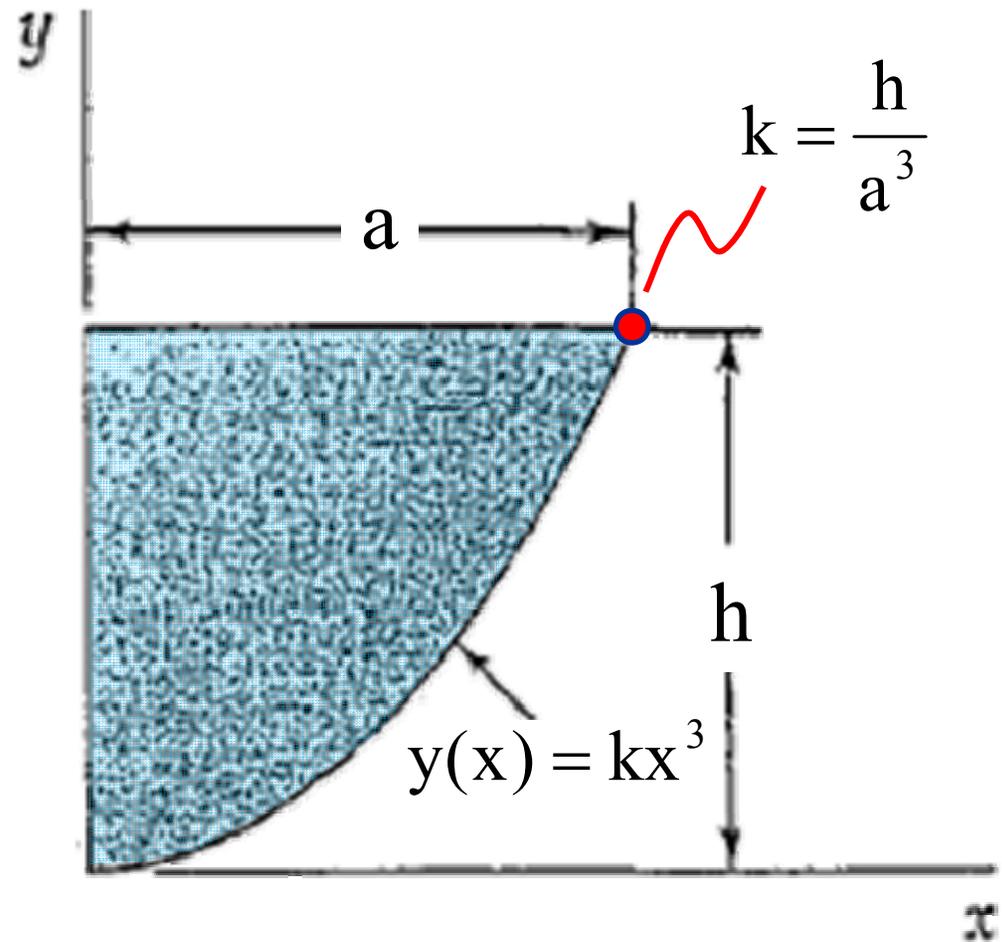
$$\bar{y}^{el} = \frac{2}{3} r(\theta) \sin \theta$$



# Determinação de Centróide por Integração

## Exemplo:

Determine por integração o centróide da superfície mostrada em termos de  $a$  e  $h$ .

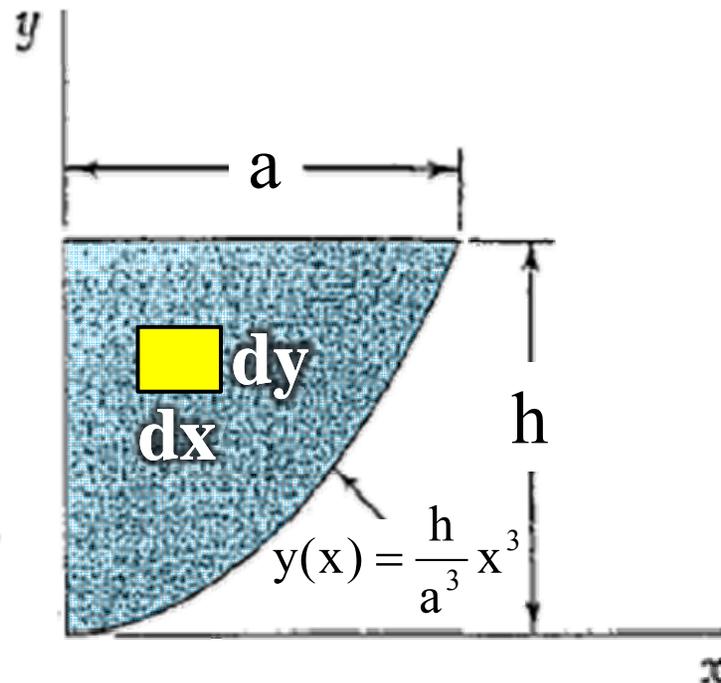


# Determinação de Centróide por Integração



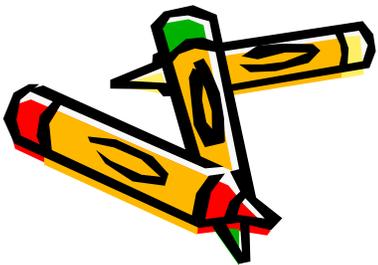
Exemplo (continuação):

Por integração dupla

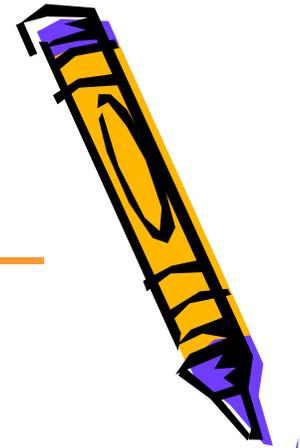


$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq a \text{ e } \frac{h}{a^3} x^3 \leq y \leq h \right\}$$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^a \int_{\frac{h}{a^3}x^3}^h dy dx \\ &= \int_0^a [y]_{\frac{h}{a^3}x^3}^h dx \\ &= \int_0^a \left( h - \frac{h}{a^3} x^3 \right) dx \\ &= \left[ hx - \frac{h}{a^3} \frac{x^4}{4} \right]_0^a \\ &= \frac{3}{4} ah \end{aligned}$$

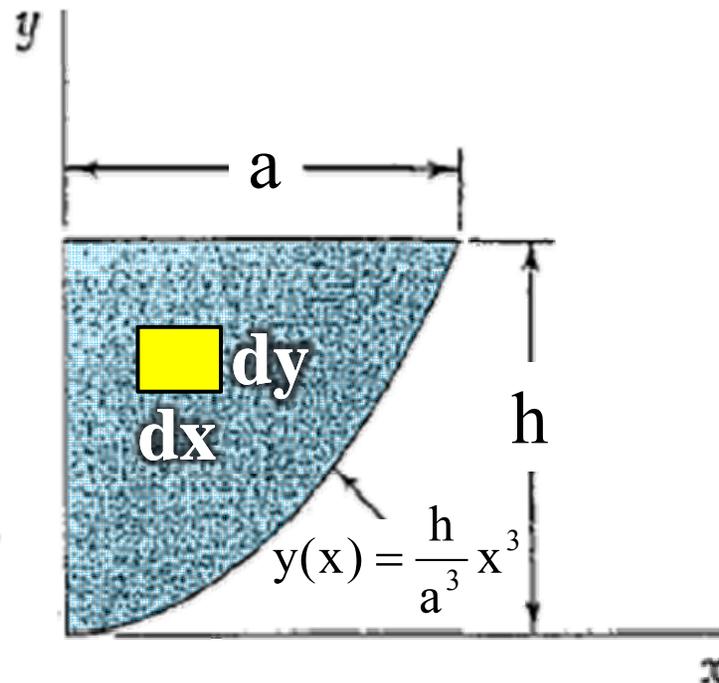


# Determinação de Centróide por Integração



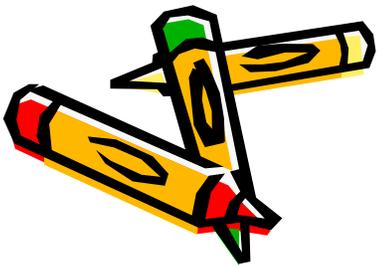
Exemplo (continuação):

Por integração dupla (cont.)

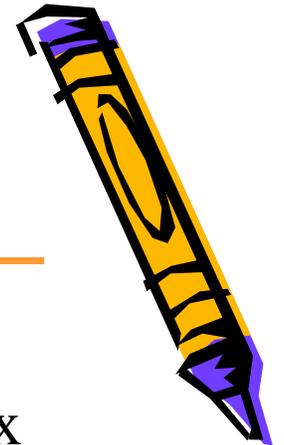


$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq a \text{ e } \frac{h}{a^3} x^3 \leq y \leq h \right\}$$

$$\begin{aligned} Q_x &= \int_0^a \int_{\frac{h}{a^3}x^3}^h y \, dy \, dx \\ &= \int_0^a \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{\frac{h}{a^3}x^3}^h dx \\ &= \int_0^a \frac{1}{2} \left( h^2 - \frac{h^2}{a^6} x^6 \right) dx \\ &= \left[ \frac{1}{2} \left( h^2 x - \frac{h^2}{a^6} \frac{x^7}{7} \right) \right]_0^a \\ &= \frac{3}{7} ah^2 \end{aligned}$$

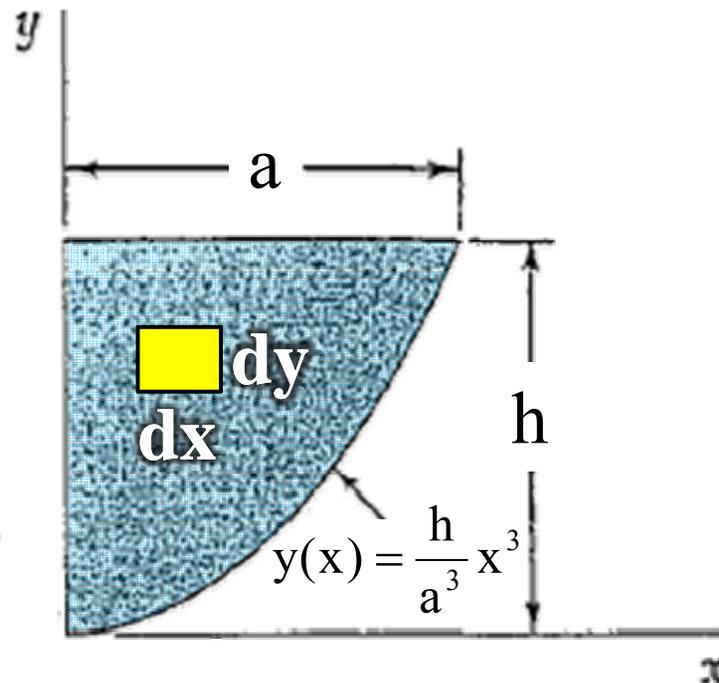


# Determinação de Centróide por Integração



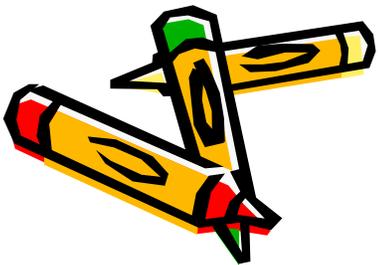
Exemplo (continuação):

Por integração dupla (cont.)

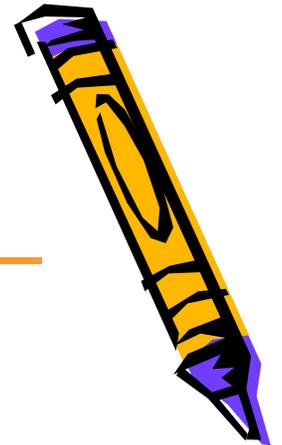


$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq a \text{ e } \frac{h}{a^3} x^3 \leq y \leq h \right\}$$

$$\begin{aligned} Q_y &= \int_0^a \int_{\frac{h}{a^3}x^3}^h x \, dy \, dx \\ &= \int_0^a [xy]_{\frac{h}{a^3}x^3}^h \, dx \\ &= \int_0^a x \left( h - \frac{h}{a^3} x^3 \right) \, dx \\ &= \left[ h \frac{x^2}{2} - \frac{h}{a^3} \frac{x^5}{5} \right]_0^a \\ &= \frac{3}{10} a^2 h \end{aligned}$$

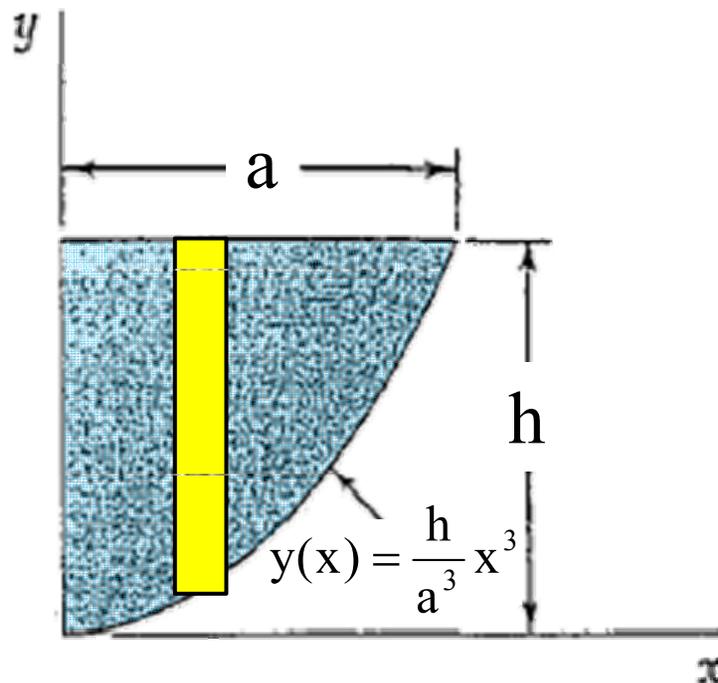


# Determinação de Centróide por Integração



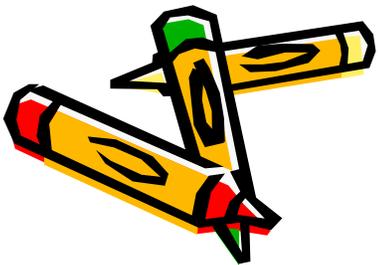
Exemplo (continuação):

Por integração de fatias



$$\begin{aligned} A &= \int_0^a \left( h - \frac{h}{a^3} x^3 \right) dx \\ &= \left[ hx - \frac{h}{a^3} \frac{x^4}{4} \right]_0^a \\ &= \frac{3}{4} ah \end{aligned}$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq a \text{ e } \frac{h}{a^3} x^3 \leq y \leq h \right\}$$

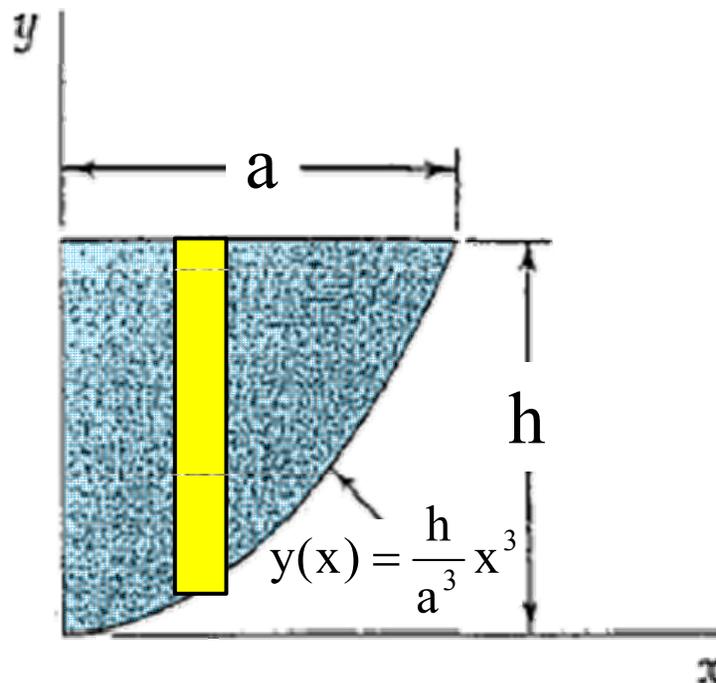


# Determinação de Centróide por Integração



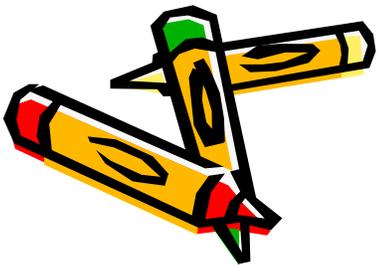
Exemplo (continuação):

Por integração de fatias (cont.)

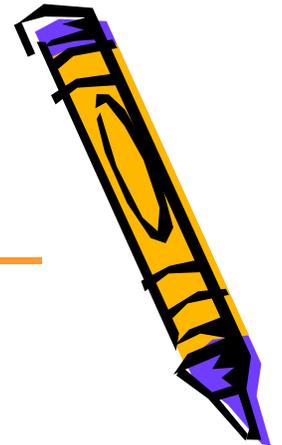


$$\begin{aligned} Q_x &= \int_0^a \frac{1}{2} \left( h^2 - \frac{h^2}{a^6} x^6 \right) dx \\ &= \left[ \frac{1}{2} \left( h^2 x - \frac{h^2}{a^6} \frac{x^7}{7} \right) \right]_0^a \\ &= \frac{3}{7} ah^2 \end{aligned}$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq a \text{ e } \frac{h}{a^3} x^3 \leq y \leq h \right\}$$

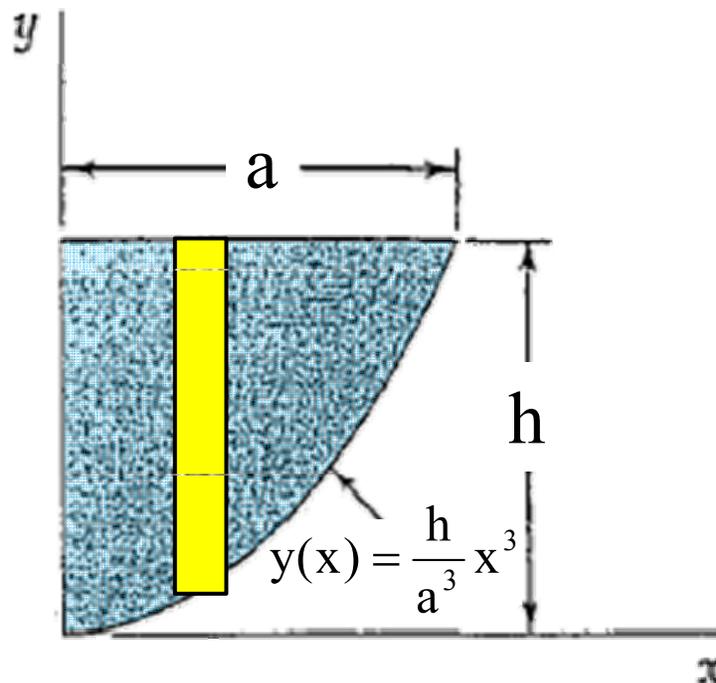


# Determinação de Centróide por Integração



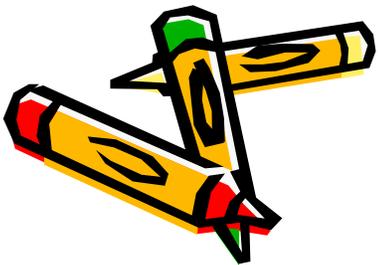
Exemplo (continuação):

Por integração de fatias (cont.)



$$\begin{aligned} Q_y &= \int_0^a x \left( h - \frac{h}{a^3} x^3 \right) dx \\ &= \left[ h \frac{x^2}{2} - \frac{h}{a^3} \frac{x^5}{5} \right]_0^a \\ &= \frac{3}{10} a^2 h \end{aligned}$$

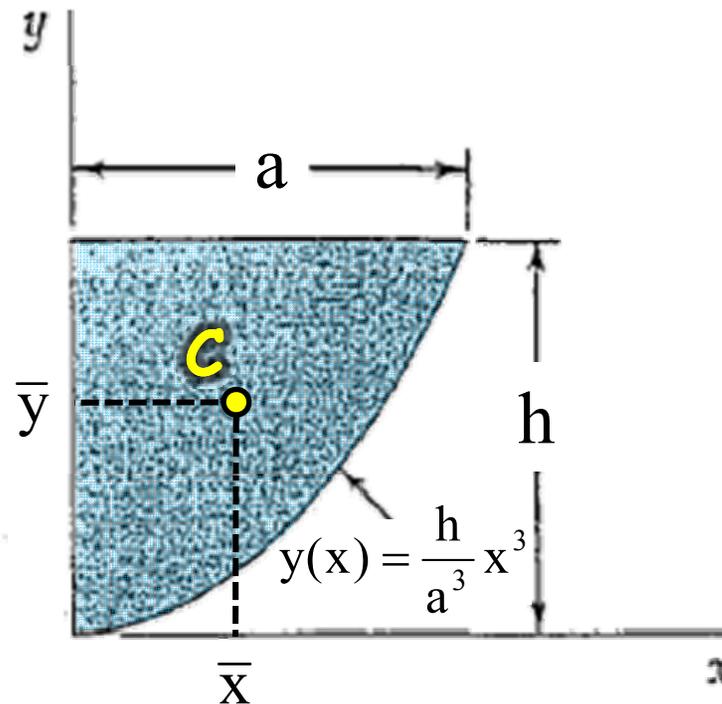
$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq a \text{ e } \frac{h}{a^3} x^3 \leq y \leq h \right\}$$



# Determinação de Centróide por Integração

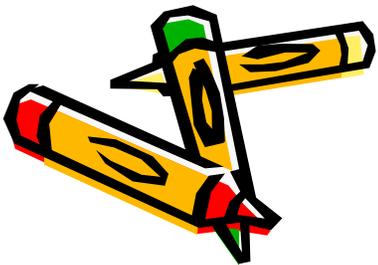


Exemplo (continuação):

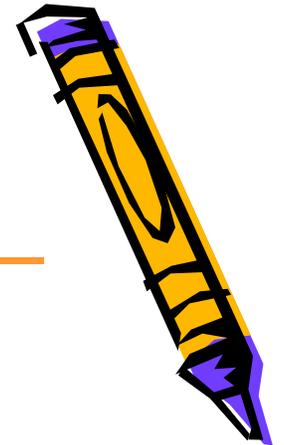


$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{2}{5}a$$

$$\bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{4}{7}h$$

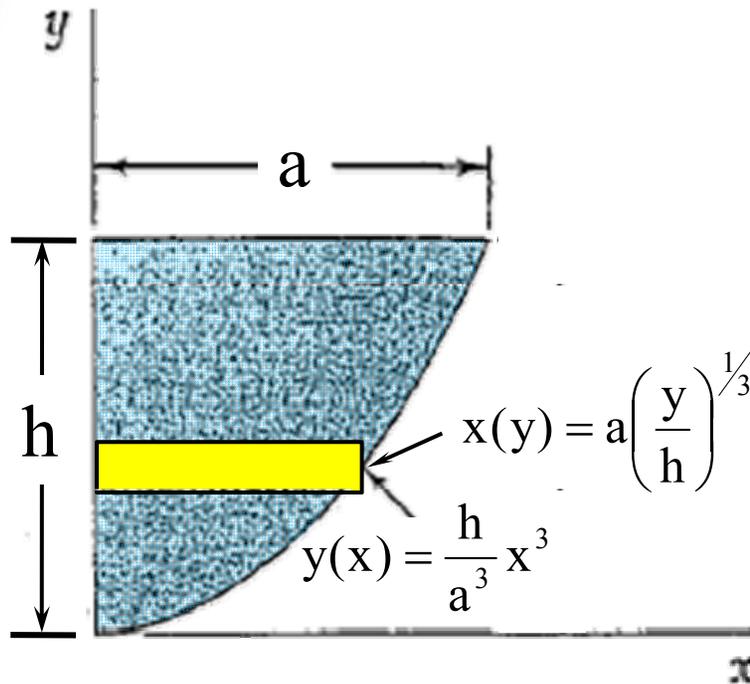


# Determinação de Centróide por Integração



Exemplo (continuação):

Por integração de fatias



$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq h \text{ e } 0 \leq x \leq a \left( \frac{y}{h} \right)^{1/3} \right\}$$

Como tratar o problema com fatias horizontais?

$$A = \int_0^h a \left( \frac{y}{h} \right)^{1/3} dy$$

$$Q_x = \int_0^h y a \left( \frac{y}{h} \right)^{1/3} dy$$

$$Q_y = \int_0^h \frac{1}{2} \left[ a \left( \frac{y}{h} \right)^{1/3} \right]^2 dy$$

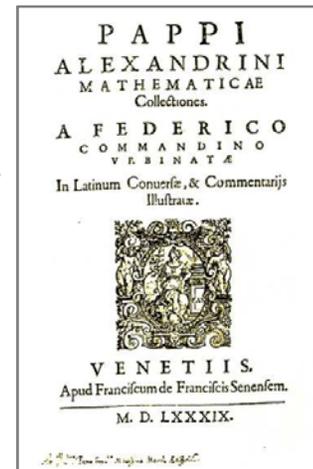


# Teoremas de Pappus-Guldin

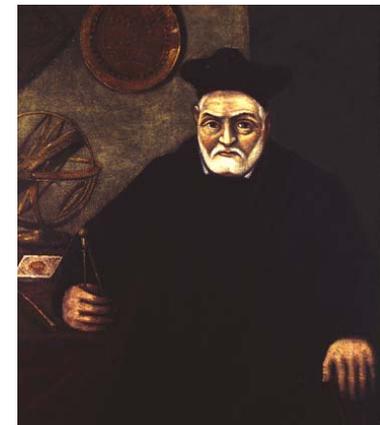
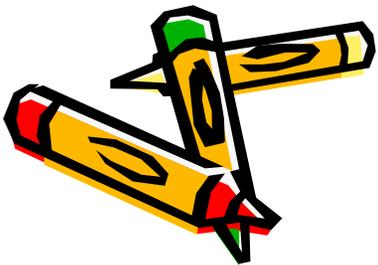
- Cálculo de área de superfície de revolução e volume de sólido de revolução.



- Formulados inicialmente pelo geômetra grego Pappus (século III d.C.)

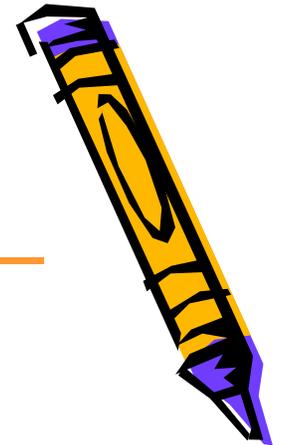
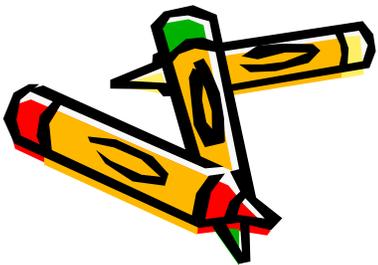
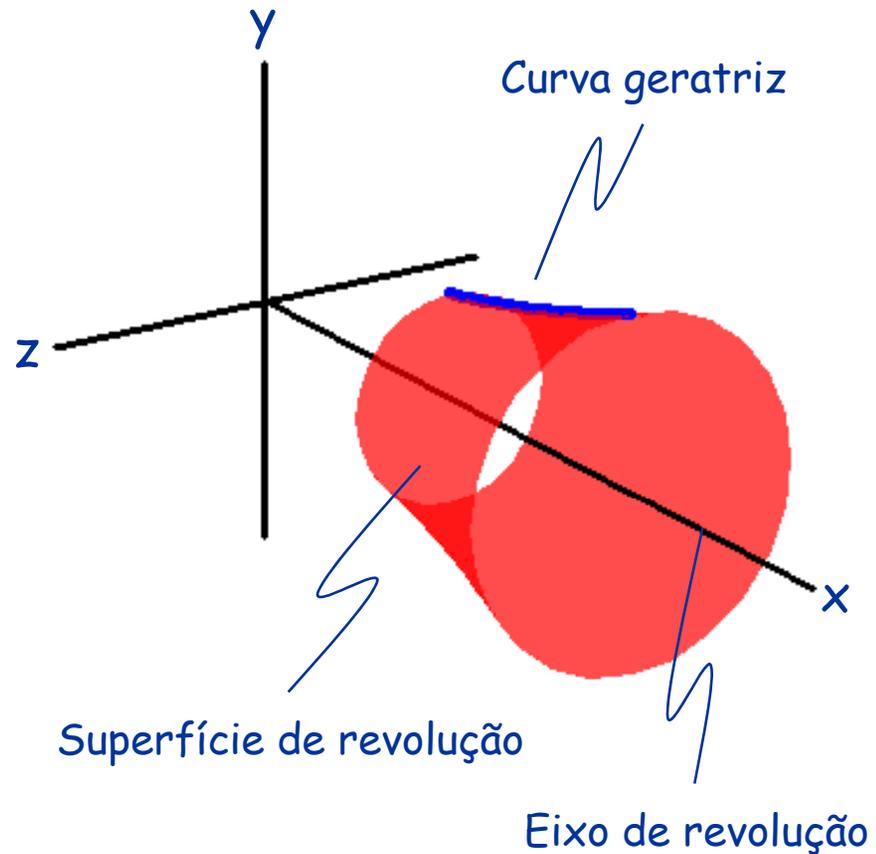
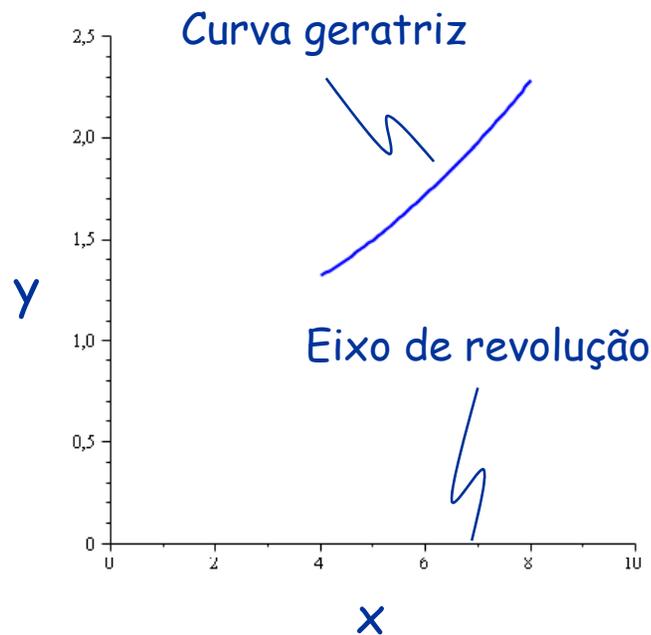


- Restabelecidos posteriormente pelo matemático suíço Guldinus, ou Guldin (1577-1643).



# Teoremas de Pappus-Guldin

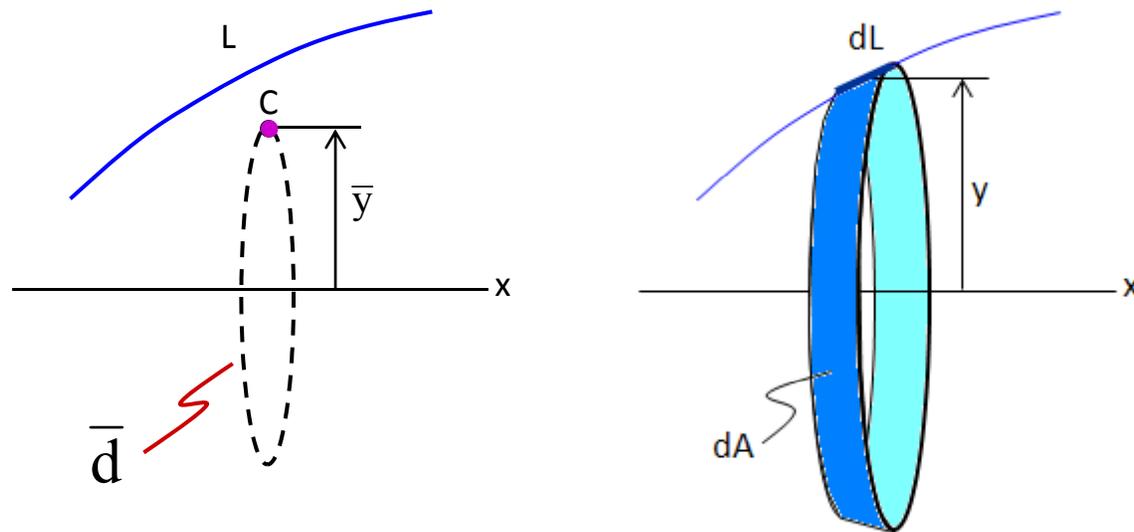
## Superfície de revolução



# Teoremas de Pappus-Guldin

## 1º Teorema de Pappus-Guldin

A área de uma superfície de revolução é dada pelo produto do comprimento da curva geratriz pela distância percorrida pelo centróide da mesma durante a geração da superfície em pauta.



$$A = \int dA$$

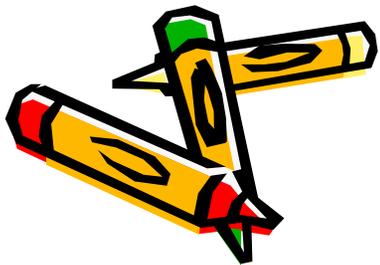
$$A = 2\pi \int y dL$$

$$dA = 2\pi y dL$$

$$A = 2\pi \bar{y} L$$

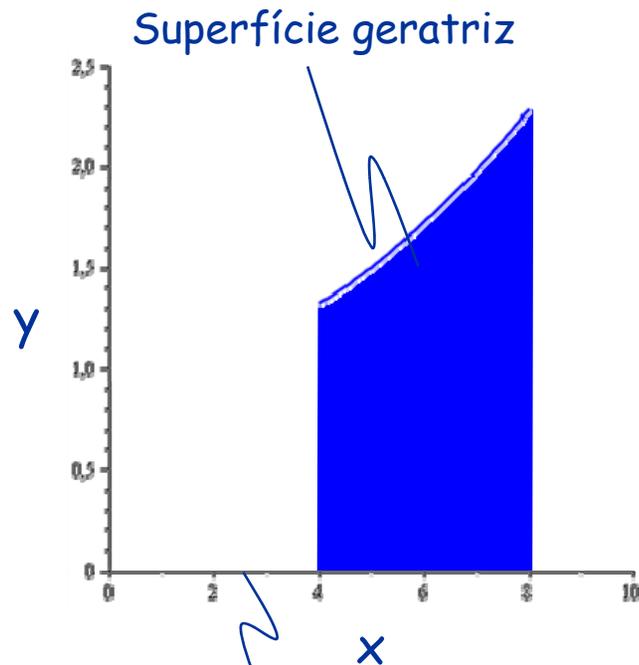
$$A = \int 2\pi y dL$$

$$A = \bar{d} L$$

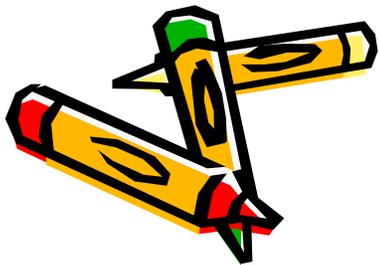
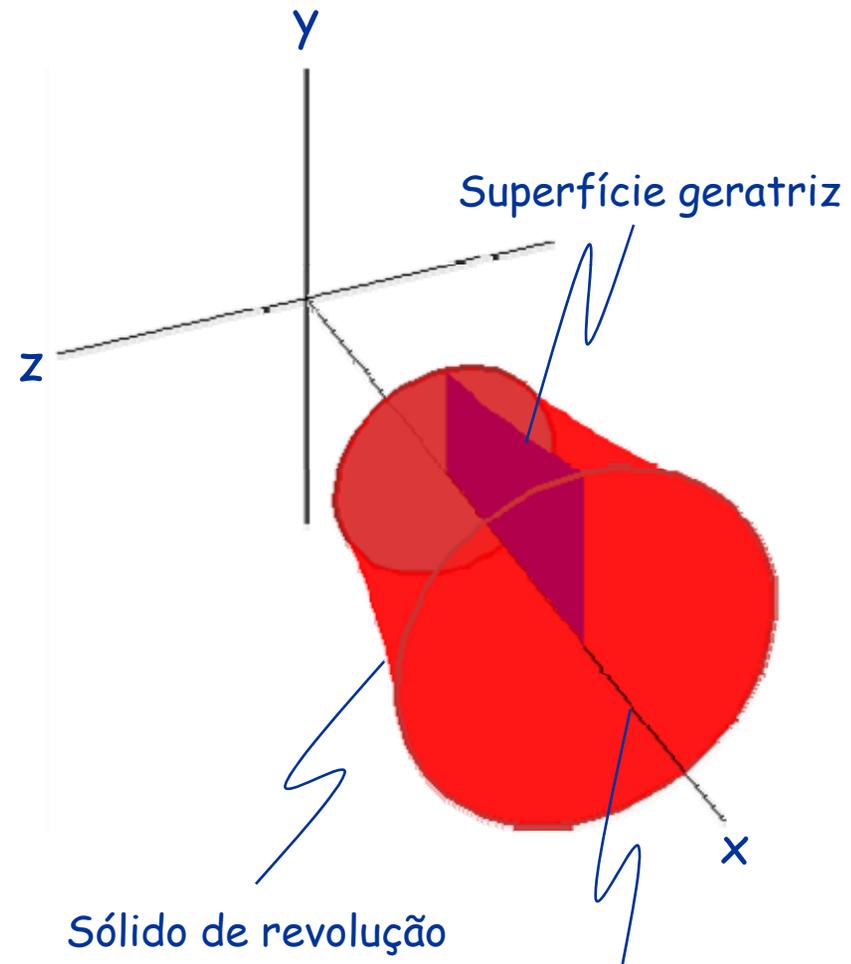


# Teoremas de Pappus-Guldin

## Sólido de revolução



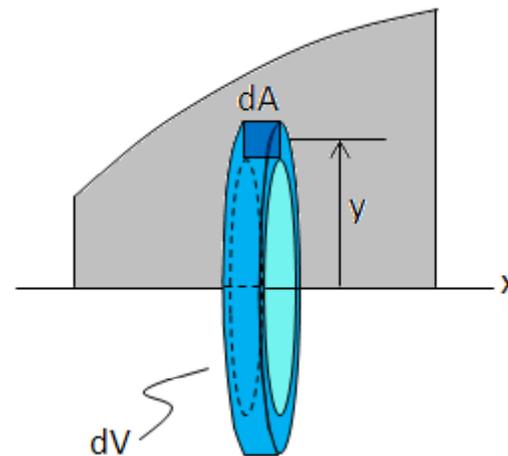
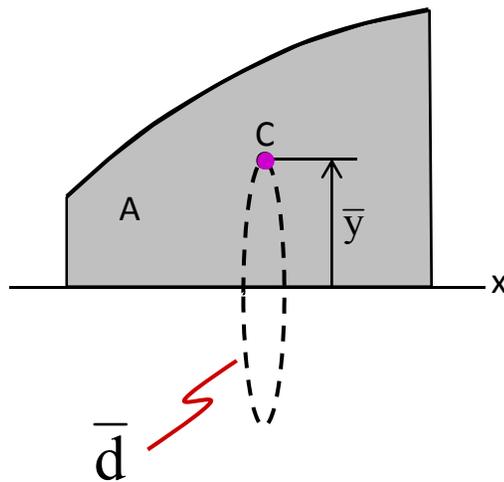
Eixo de revolução



# Teoremas de Pappus-Guldin

## 2º Teorema de Pappus-Guldin

O volume de um sólido de revolução é dado pelo produto da área da superfície geratriz pela distância percorrida pelo centróide da mesma durante a geração do sólido em pauta.



$$V = \int dV$$

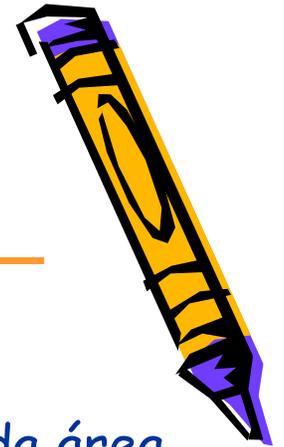
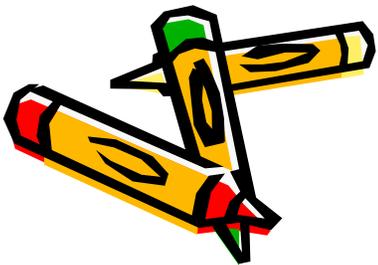
$$dV = 2\pi y dA$$

$$V = \int 2\pi y dA$$

$$V = 2\pi \int y dA$$

$$V = 2\pi \bar{y} A$$

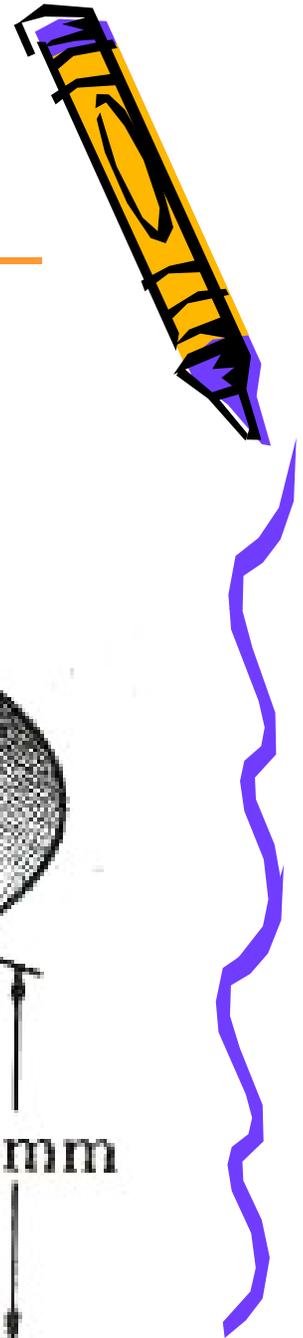
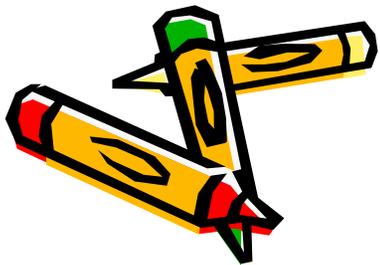
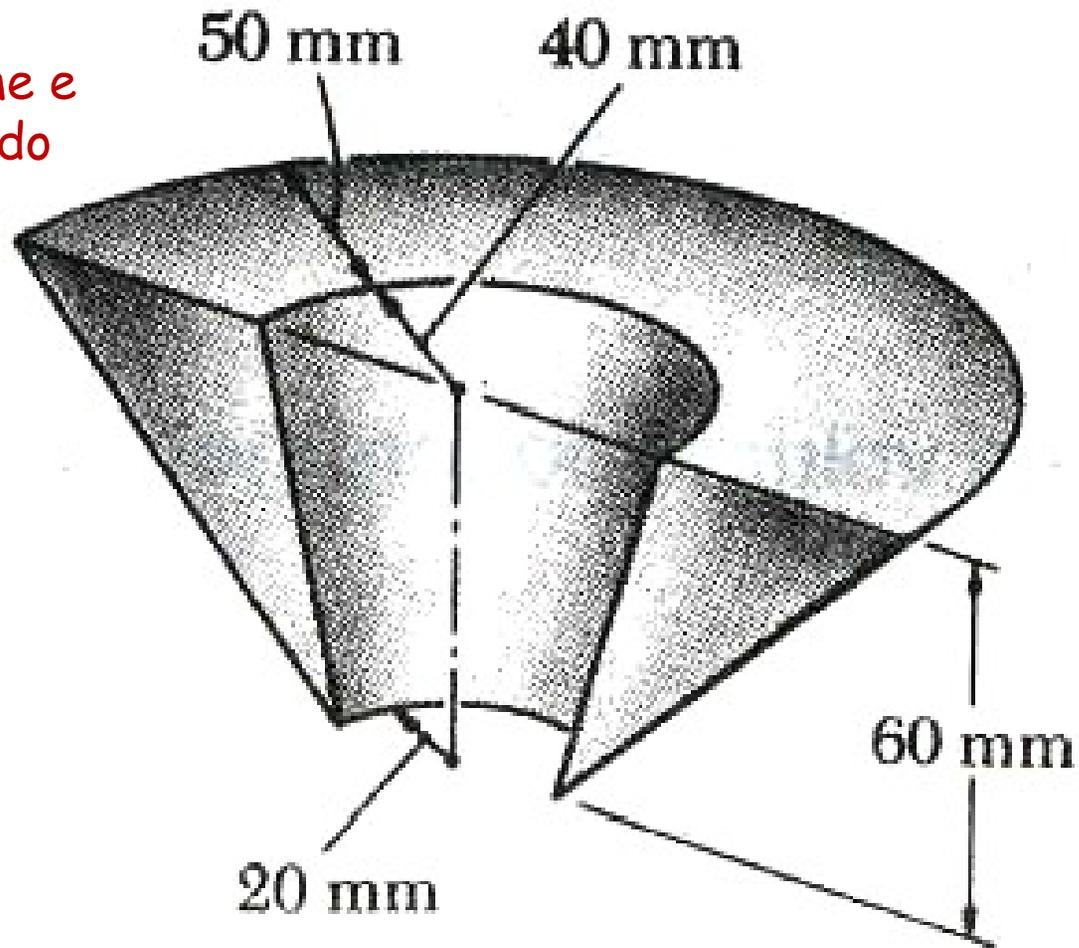
$$V = \bar{d} A$$



# Teoremas de Pappus-Guldin

## Exemplo:

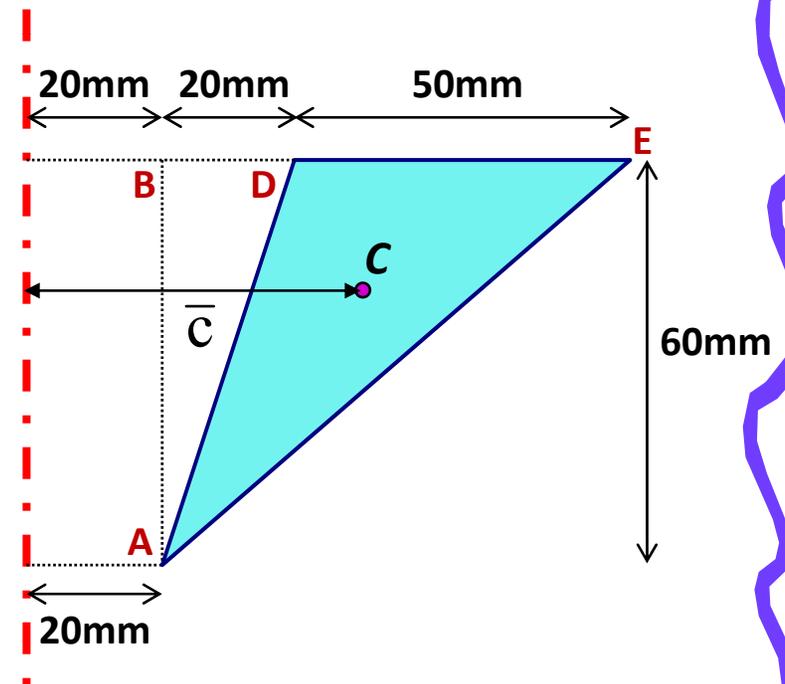
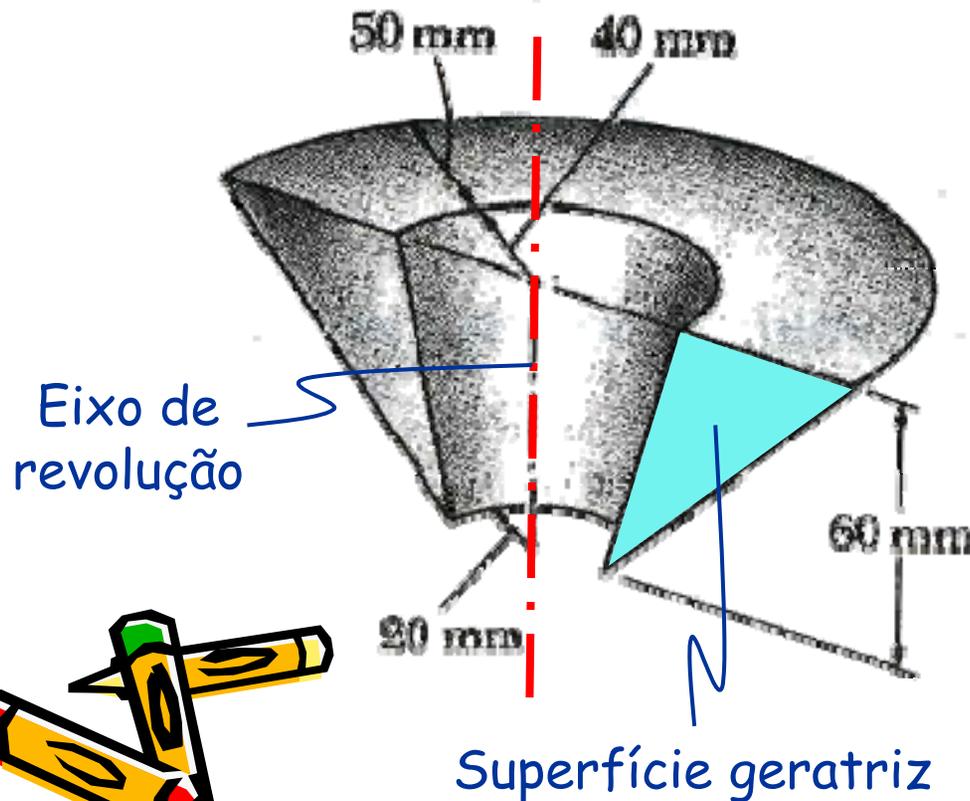
Determine o volume e a área superficial do sólido mostrado.



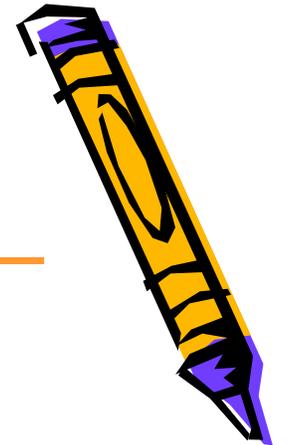
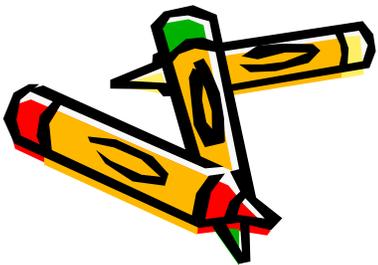
# Teoremas de Pappus-Guldin

Exemplo (continuação):

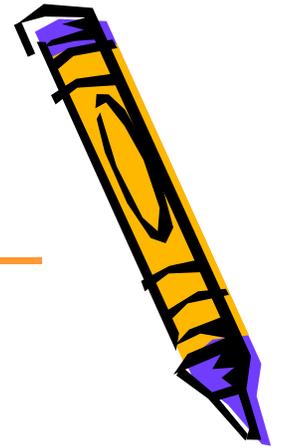
Cálculo do volume pelo 2º Teorema de Pappus-Guldin



$$V^{SR} = \pi \bar{C} A^{SG} = \pi Q_{ER}^{SG}$$

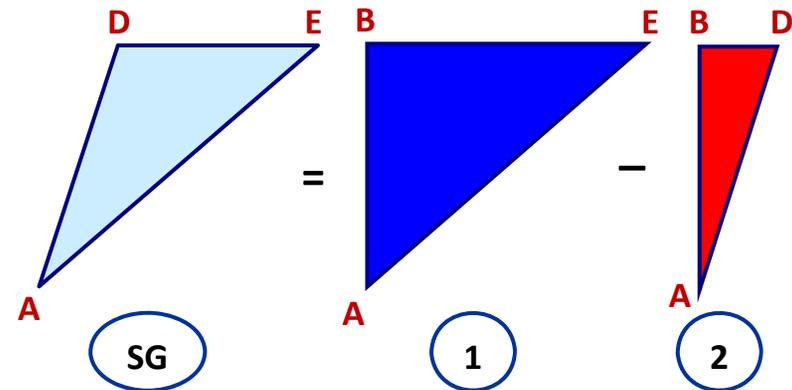
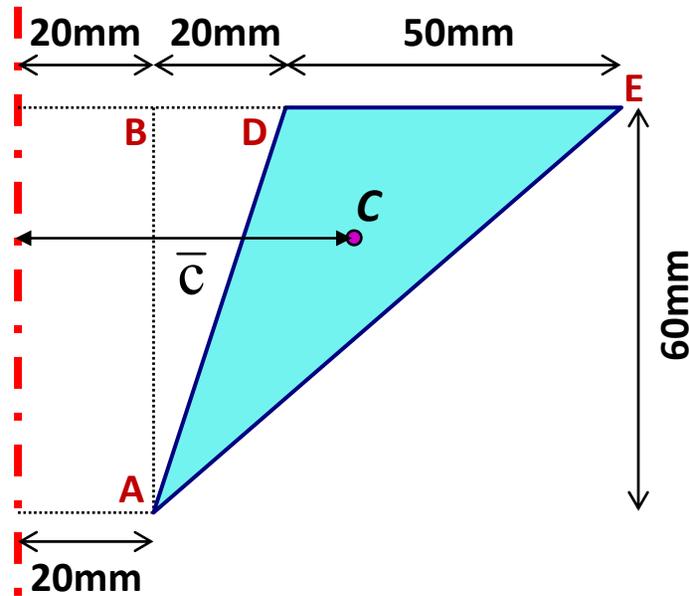


# Teoremas de Pappus-Guldin



Exemplo (continuação):

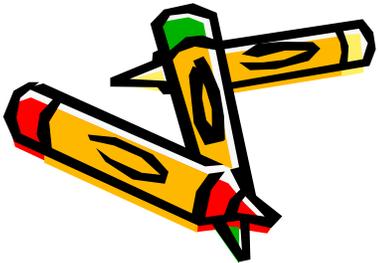
Cálculo do volume pelo 2º Teorema de Pappus-Guldin (cont.)



$$Q_{ER}^{SG} = Q_{ER}^1 - Q_{ER}^2$$

$$Q_{ER}^{SG} = \frac{70 \cdot 60}{2} \cdot \left( \frac{70}{3} + 20 \right) - \frac{20 \cdot 60}{2} \cdot \left( \frac{20}{3} + 20 \right)$$

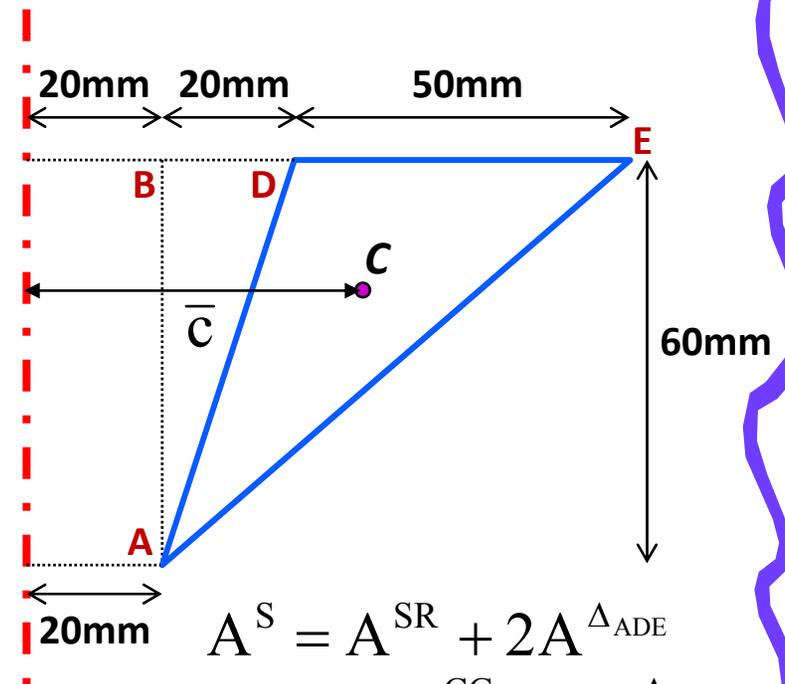
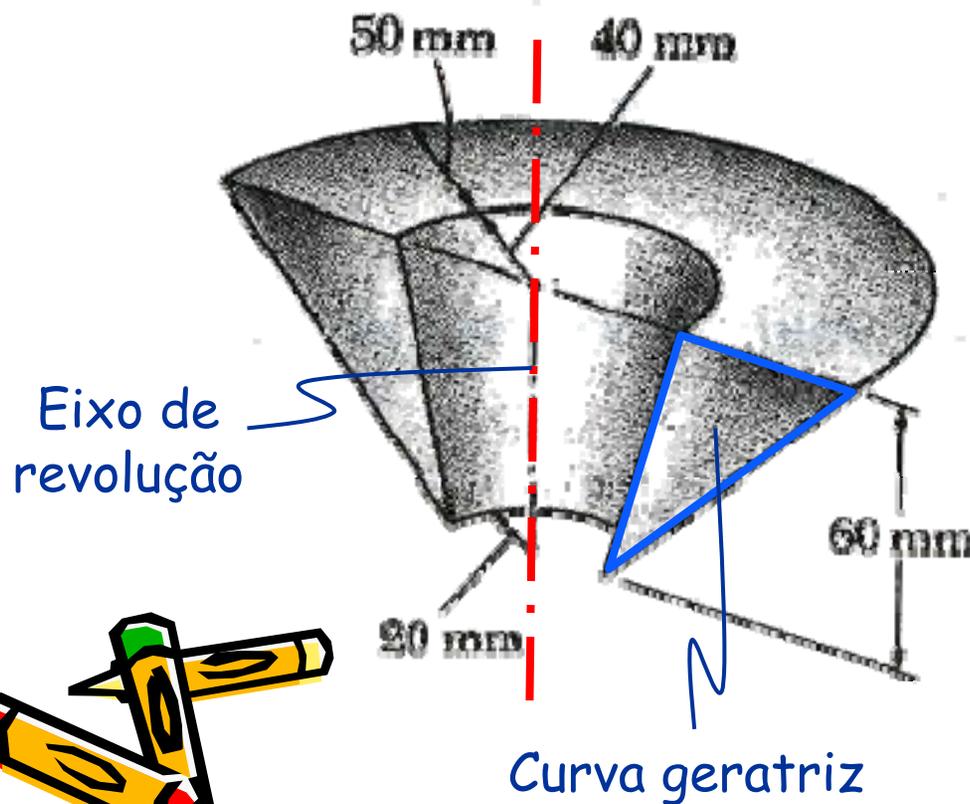
$$Q_{ER}^{SG} = 75000 \text{ mm}^3 \Rightarrow V^{SR} = 75000\pi \text{ mm}^3$$



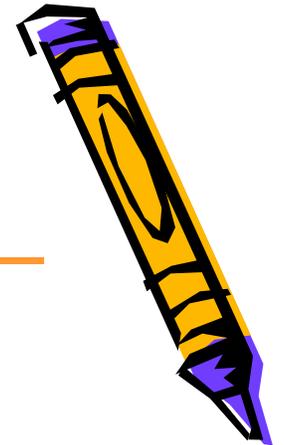
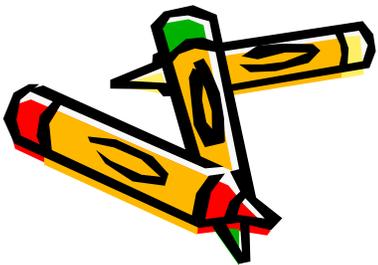
# Teoremas de Pappus-Guldin

Exemplo (continuação):

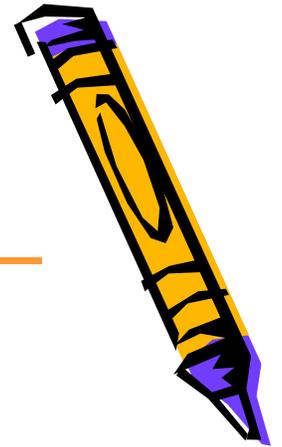
Cálculo da área pelo 1º Teorema de Pappus-Guldin



$$\begin{aligned}
 A^S &= A^{SR} + 2A^{\Delta ADE} \\
 &= \pi \bar{c} L^{CG} + 2A^{\Delta ADE} \\
 &= \pi Q_{ER}^{CG} + 2A^{\Delta ADE}
 \end{aligned}$$

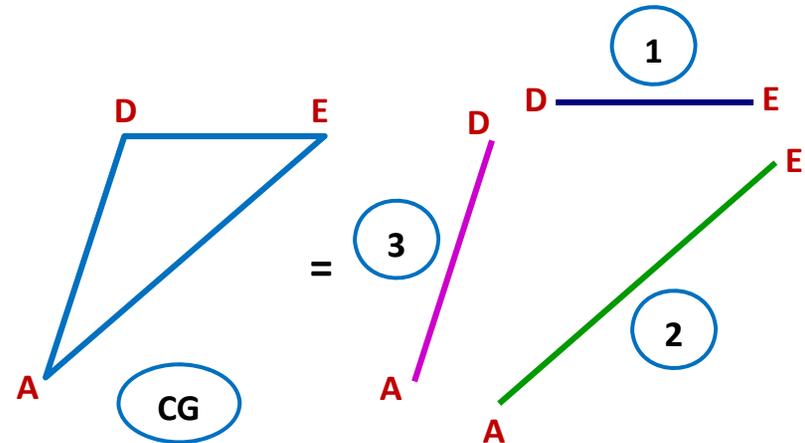
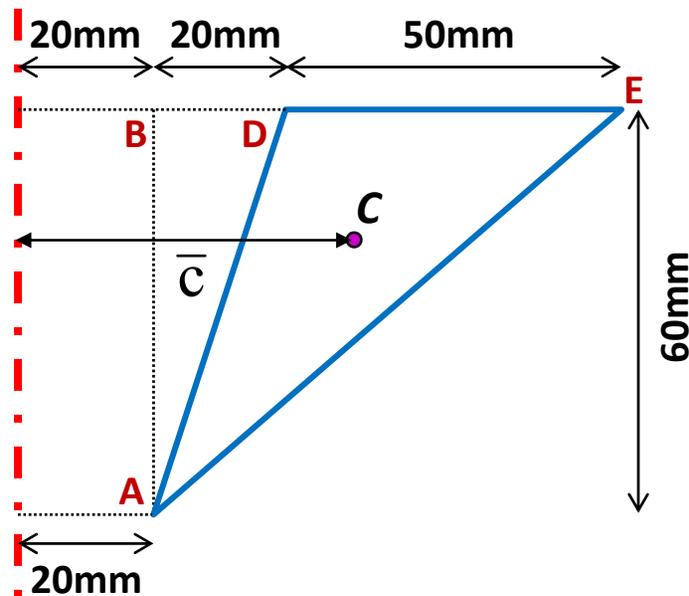


# Teoremas de Pappus-Guldin



Exemplo (continuação):

Cálculo da área pelo 1º Teorema de Pappus-Guldin (cont.)



$$Q_{ER}^{CG} = Q_{ER}^1 + Q_{ER}^2 + Q_{ER}^3$$

$$Q_{ER}^{CG} = 50 \cdot \frac{40 + 90}{2} + \sqrt{70^2 + 60^2} \cdot \frac{90 + 20}{2} + \sqrt{20^2 + 60^2} \cdot \frac{40 + 20}{2}$$

$$Q_{ER}^{CG} = 10218,1 \text{ mm}^2 \Rightarrow A^S = 10218,1\pi + 50 \cdot 60 = 35101,2 \text{ mm}^2$$

